Entwicklung der Vorstellungen von Grundschülerinnen und Grundschülern zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Philosophie (Dr. phil.)

der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg

vorgelegt von Christoph Till aus Illertissen

Ludwigsburg
2015

Erstgutachterin: Prof. Dr. Laura Martignon
Zweitgutachter: Prof. Dr. Wolfgang Gaissmaier

Datum des Abschlusses der mündlichen Prüfung: 13. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Danksagung

Ich bedanke mich beim Land Baden-Württemberg und insbesondere beim Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst durch eine zweifache Unterstützung. Zum einen profitierte ich von einem Stipendium, zum anderen war ich Teil des vom Land finanzierten Promotionskollegs, mit dem Namen *„Effektive Lehr-Lernarrangements: Empirische Evaluation und Intervention in der pädagogischen Praxis. Kooperatives Promotionskolleg zwischen der Universität Tübingen und der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg“*. Dies sorgte durchwegs für eine gute methodische Infrastruktur in Form von Workshops, regelmäßigen Treffen mit anderen Doktoranden, Tagungsbesuchen sowie ausführlichen Beratungsgesprächen mit Betreuern und Experten aus eigenen und benachbarten Forschungsdisziplinen. Hinzu kamen etliche Abendessen, Spaziergänge, Stammtische und Kneipenabende, die meine Zeit als Doktorand auflockerten. Durch die gute finanzielle Unterstützung von Seiten des Kollegs hatte ich auch die Möglichkeit, die im Rahmen meiner Arbeit entstandenen Ideen und Ergebnisse in Weingarten, Münster, Koblenz, Frankfurt, Kiel, Berlin und nicht zuletzt auch Flagstaff (USA) zu präsentieren.

Ich bedanke mich bei den Organisatoren der *International Conference on Teaching Statistics 9 (ICOTS9)* im Juli 2014 für eine sehr spannende, internationale Tagung und für die Würdigung meiner Arbeit in Form eines Nachwuchspreises.

Ein großer Dank geht an meine Erstbetreuerin Prof. Dr. Laura Martignon, die mich jederzeit in meinen Ideen unterstützte und mir zugleich aber auch Spielraum ließ, die eigenen Gedanken zu spinnen. Durch sie machte ich Bekanntschaften mit Kognitionspsychologen am Harding-Zentrum für Risikokompetenz am MPI für Bildungsforschung in Berlin, die mich in meiner Arbeit inspirierten. Die gemeinsame Arbeit war durch einen sehr freundschaftlichen und humorvollen Umgang charakterisiert, was manch stressige Arbeitsphase auflockerte. Ob es nun um den verloren gegangenen Ehering eines verzweifelten Ehemanns oder die emotionalen Irrwege einer Bridget Jones ging – wir hatten neben der Arbeit auch Zeit zu lachen. Ein großes Dankeschön geht auch an meine Betreuer Prof. Dr. Hans-Christoph Nürk und Prof. Dr. Wolfgang Gaissmaier. Durch die Gespräche mit ihnen wurden meine mathematikdidaktischen Ansätze durch kognitionspsychologische Perspektiven ergänzt. Bei Barbara Flunger bedanke ich mich für ihre Unterstützung bei statistischen Fragen. Ich möchte Prof. Dr. Joachim Engel dafür danken, dass er stets ein offenes Ohr für meine wissenschaftlichen Belange hatte. Auch Andreas Fest zeigte sich bei auftretenden Formatierungsschwierigkeiten bei der Arbeit mit LaTeX immer hilfsbereit und offen. Die schöne Zeit am „IMI“ habe ich auch Marita Friesen, Ute Sproesser und Anika Dreher zu verdanken, die mich in meinem wissenschaftlichen Alltag begleiteten. Zuletzt geht ein großer Dank an meinen Vater für das Korrekturlesen meiner Arbeit.

2 Zusammenfassung

„Sollte ich mich impfen lassen?“, „Wie sollte ich mein Geld anlegen?“, „Wie wichtig sind Vorsorgeuntersuchungen?“

Kompetenzen, Risiken einzuschätzen und auf Basis von Daten Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen, spielen heutzutage eine bedeutende Rolle. Befunde aus der kognitionspsychologischen Forschung belegen, dass statistische Informationen über Chancen und Risiken in der Medizin, der Umwelt oder Finanzwelt meistens nicht richtig interpretiert werden (Gigerenzer, 2013; Spiegelhalter, Pearson & Short, 2011). Dies liegt oft am Darstellungsformat dieser Informationen: Bei der Kommunikation von Risiken sollten statt Wahrscheinlichkeiten oder Prozentsätzen vermehrt intuitiv greifbare Häufigkeitsformate (natürliche Häufigkeiten) und ikonische Darstellungen (in Form von Piktogrammen) eingesetzt werden (Brase, 2008; Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Schapira, Nattinger & McHorney, 2001). In der vorliegenden Arbeit zeige ich auf, wie sich diese Darstellungsformate auch für die Grundschulstochastik eignen, um mit Kindern „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit“ zu modellieren. Durch den zusätzlichen Einsatz enaktiver Informationsformate in Form bunter Steckwürfel ist es für sie ohne den Bruchzahl- und Prozentbegriff möglich, elementare, qualitative und quantitative Wahrscheinlichkeitsaussagen in risikobehafteten Situationen zu treffen. In einer Interventionsstudie wurden Belege dafür gefunden, dass sich diese ersten elementaren Kompetenzen zu Risiko nachhaltig fördern lassen. Zur Intervention in Form einer vierstündigen Unterrichtseinheit gehörten: Vergleichen von Verhältnissen und elementaren Wahrscheinlichkeiten, Abwägen von Handlungsoptionen anhand von Zufallsexperimenten und die Auseinandersetzung mit sich verändernden Wahrscheinlichkeiten durch neue Information sowie die Auseinandersetzung mit Risikoreduktionen. Verglichen wurden die Testleistungen der Schülerinnen und Schüler aus den Treatmentklassen mit den Testleistungen der Schülerinnen und Schüler aus Kontrollklassen. Es zeigte sich Vorwissen bezüglich der geförderten Inhalte in Form von mathematischen Intuitionen (Fischbein, Pampu & Minzat, 1970a) und ein signifikanter, nachhaltiger Lernzuwachs durch die Intervention. Die Förderung verschiedener elementarer Kompetenzen und Konzepte zum Themenbereich „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit“ anhand geeigneter Repräsentationen kann daher als erfolgreich bezeichnet werden.

Abstract

"Should I get vaccinated?", "How should I invest my money?", "How important are medical checkups?"

Nowadays being able to assess risks and to make data-based decisions under uncertainty are essential for everyday life. Evidence from cognitive psychological research shows that statistical information about risks is often not understood or misinterpreted. This concerns above all medical, environmental or financial domains (Gigerenzer, 2013; Spiegelhalter et al., 2011). This is often due to the representation format of the information: probabilities in terms of percentages are often hard to grasp; information is much better processed if the information is communicated by means of frequency formats such as natural frequencies and iconic representations such as icon arrays (Brase, 2008; Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Schapira et al., 2001). In the present work I will show that these representation formats are well-suited for primary school stochastics for modeling *risk and decisions under uncertainty*. By using hands-on materials in form of colored tinker cubes, children do first qualitative and quantitative risk-related judgments without even knowing about percentages or fractions. I did an intervention study in order to gather empirical evidence for the usefulness of this learning approach. The intervention happened in form of a four-hour unit and included the following aspects: comparing ratios and probabilities, weighing of options based on random experiments, conditional proportions and Bayesian reasoning as well as dealing with risks reduction. Test performances of treatment and control groups were compared before, directly after and three month after the intervention. It turned out that children had prior knowledge of the funded content even before the intervention in the form of mathematical intuitions (Fischbein et al., 1970a). Students successfully built on these intuitions through the intervention, as was clear from their test performances which increased significantly.

Figure 2.1: Relative Risiken

3 Theoretischer Hintergrund

Tag für Tag setzen wir uns bewusst oder unbewusst Risiken aus und müssen dabei Entscheidungen treffen, die unser Leben und das unserer Mitmenschen verändern könnten. Dabei werden wir von einer immer größeren Flut an Daten in Form von Zahlen und Statistiken überhäuft. Wir hören von „10-Jahres-Überlebensraten“, von gefährlichen Nebenwirkungen bei bewährten Impfungen, von verminderten Risiken bei Einnahme von Nahrungsergänzungsmitteln und von falsch-positiven Testresultaten in der medizinischen Diagnostik. Diesbezügliche Risiken müssen eingeordnet, verstanden und vor allem richtig interpretiert werden: Vermeintliche hohe Risiken erweisen sich beim genaueren Hinschauen oftmals als vernachlässigbar, während Risiken, über die kaum gesprochen wird, jährlich viele Todesopfer fordern. So macht uns der Transatlantikflug große Angst, obwohl wir den gefährlichsten Teil unserer Reise beim Ankommen am Flughafen mit dem Auto bereits überstanden haben (Gigerenzer, 2013). BSE, Schweine- und Vogelgrippe lösen Paniken aus, während die saisonale Grippe jedes Jahr weitaus mehr Opfer fordert. Genmodifizierte Nahrungsmittel beunruhigen viele Bürgerinnen und Bürger; die Tatsache einer nicht unwesentlichen radioaktiven Strahlungsdosis bei medizinischen Vorsorgeuntersuchungen ist dagegen unbekannt oder wird ignoriert. Das jüngste Beispiel für eine Angst, die der tatsächlichen Gefahr nicht gerecht wird, ist die der Ebolakrise geschuldeten Panikmache vieler US-Bürger. In der Tat ist die Ebola-Krise in Westafrika die schlimmste Seuchenkrise in der jüngsten Zeit. Sie hat in den betroffenen Gebieten etwa 3400 Opfer gefordert (Stand November 2014) (Dehmer & Möllhoff, 2014). Die Ansteckungsgefahr im Krisengebiet ist enorm hoch. Das Risiko jedoch, sich in den Vereinigten Staaten mit dem tödlichen Virus anzustecken, ist minimal (Wagner, 2014). Die tatsächliche Gefahr, die vom Ebolavirus ausgeht, ist in Graphik 3.1 dargestellt (Doucleff, 2014).

Die Schwierigkeit, Risiken adäquat einzuschätzen, beruht unter anderem auf der Tatsache, dass Menschen auf Gefahren oft emotional reagieren und sich schwer tun, Fakten in Form von Zahlen heranzuziehen, um das tatsächliche Ausmaß eines Risikos oder einer Gefahr abzuschätzen. Darüber hinaus werden in den Medien Risiken oftmals auf eine Art und Weise dargestellt, die es kaum erlaubt, sich eine fundierte und objektive Meinung zu bilden (Spiegelhalter u. a., 2011). Unverständliche Graphiken, Prozentzahlen und eine Beschreibung von Risiken, die einen weiten Interpretationsspielraum lassen, sollen dann helfen, die richtigen Schlüsse in Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen. Es gibt jedoch auch viele gute Beispiele, wie Risiken in einer transparenten Form kommuniziert werden können. Abbildung 3.1 erlaubt durch den relativen Vergleich verschiedener Risiken ein objektives Bild der Situation. Im folgenden Kapitel werden Ursachen für die verzerrte Risikowahrnehmung näher betrachtet und geklärt, wie Risiken auf eine verständliche Art und Weise kommuniziert werden können.

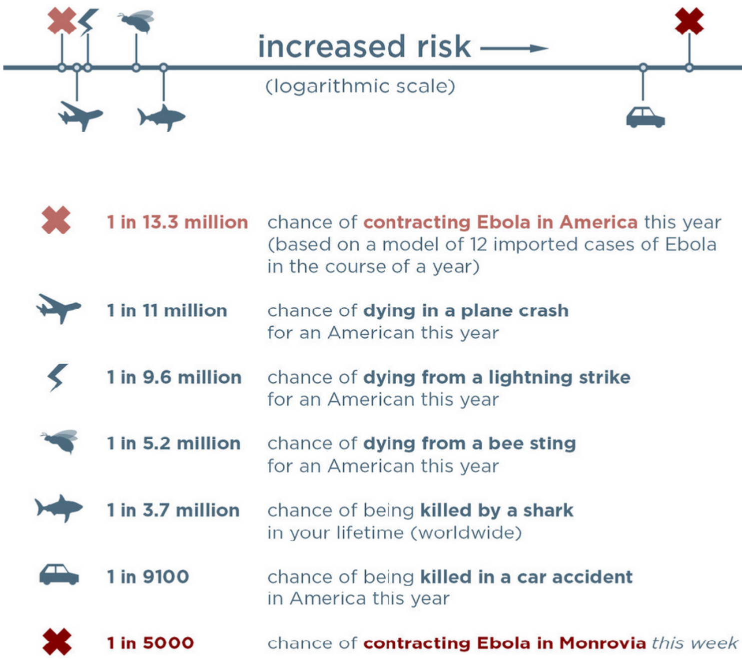


Abbildung 3.1: Relativer Vergleich verschiedener Risiken

3.1 Psychologische Risikoforschung

Am Berliner Max-Planck-Institut für Bildungsforschung hat sich eine Gruppe von Kognitionspsychologen darauf spezialisiert, das menschliche Entscheidungsverhalten unter Unsicherheit zu erforschen. Schwerpunkte der Forschungsarbeiten am Harding-Zentrum für Risikokompetenz sind Risikowahrnehmung und Risikokommunikation. Befunde zeigen deutlich, dass die Risikowahrnehmung und die damit verbundene Einschätzung von Risiko vieler Menschen nicht auf einer objektiven Beurteilung des tatsächlichen Risikos beruht. Vielmehr neigen Menschen dazu, subjektive Kriterien für ihr Entscheidungsverhalten heranzuziehen. Demnach beeinflussen in vielen Fällen mit dem vorliegenden Risiko assoziierte Emotionen und Einzelschicksale vertrauter Personen, wie sich Menschen in Risikosituationen verhalten. Anstatt sich auf statistische Information zu berufen und Daten als Entscheidungsgrundlage heranzuziehen, bestimmen oftmals Schlagzeilen, persönliche Erfahrungen oder Gewohnheiten was getan wird.

Desweiteren können Defizite im Umgang mit Zahlen dazu führen, dass nicht immer die richtigen Schlussfolgerungen gezogen werden. In einer Studie von Galesic und Garcia-Retamero (2010) lösten nur etwa 75 % der deutschen Probanden (USA: 72 %) die erste und nur 55 % (USA: 57 %) die zweite Aufgabe zum Vergleich von Risiken:

- „Which of the following numbers represents the biggest risk of getting a disease? *1 in 100*, *1 in 1000*, or *1 in 10*“?
- „If person A's chance of getting a disease is *1 in 100* in 10 years and person B's risk is double that of A, what is B's risk?“

Wenn man bedenkt, dass man bei diesen Aufgaben durch alleiniges Raten eine Lösungsrate von etwa 30 % erwarten würde, sind diese Ergebnisse beunruhigend. Vermutlich würden die Lösungsraten noch einmal geringer ausfallen, würde man die Zahlen in den Aufgaben in Form von Prozenten darstellen. Dies soll aber keineswegs Anlass sein, sich bei der Kommunikation von Risiken keine Gedanken mehr über das Darstellungsformat der Information zu machen. So liegt eine Vielzahl an Befunden vor, die zeigen, dass sich bestimmte Darstellungen besser dafür eignen, statistische Information zu kommunizieren (Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Spiegelhalter u. a., 2011; Brase, 2008; Corter & Zahner, 2007; Gaissmaier u. a., 2012; Hoffrage, Gigerenzer, Krauss & Martignon, 2002). Demnach erweisen sich Häufigkeitsformate als besonders intuitiv greifbar. Als Grund kann hierfür kann die besondere Passung der Darstellungsformate auf die menschliche Informationsverarbeitung genannt werden (Gigerenzer & Hoffrage, 1995).

Risiken werden in Form von Wahrscheinlichkeiten – meist repräsentiert in Form von Prozentsätzen – kommuniziert. Die Normierung auf *100* (Bsp.: *21 von 70* → 30 %) geht einher mit einer höheren Auslastung des Arbeitsgedächtnisses (Sedlmeier, 2001). Dieser zusätzliche „Übersetzungsprozess" bei der Verarbeitung numerischer Information wird als Ursache dafür angesehen, warum Menschen oftmals Schwierigkeiten haben, Angaben in Prozent richtig zu interpretieren. Hingegen werden Häufigkeitsformate wie etwa *natürliche Häufigkeiten* leichter verarbeitet. Wird beispielsweise berichtet, dass sich bei einem bestimmten Ereignis *21 von insgesamt 70* Menschen verletzt haben, ist dies klar verständlich. Die gleiche Information in Form von 30 % ist für viele Menschen nicht nur schwieriger zu deuten; Informationen über die tatsächliche Anzahl der Verletzten und der Gesamtzahl aller Personen sind nicht mehr vorhanden, was jedoch aus statistischer Sicht bedeutsam sein kann (Stichwort: Variabilität in kleinen Stichproben, siehe Kapitel 3.2.3).

Durch die Darstellung natürlicher Häufigkeiten in Form ikonischer Darstellungen kann die Transparenz numerischer Information erhöht werden (Brase, 2008; Gigerenzer, 2013; Garcia-Retamero, Galesic & Gigerenzer, 2010). Häufigkeiten und Verhältnisse können dabei in analoger Form in einem sogenannten *Piktogramm* abgebildet werden. Jedes Individuum wird dabei in Form eines Symbols oder Zeichens repräsentiert, was die Zuordnung einer Person zu einer bestimmten Personengruppe erleichtert (Kurz-Milcke, Gigerenzer & Martignon, 2008, 2011). Dabei werden Häufigkeiten im Sinne eines besseren Verständnisses auf hypothetische Populationen normiert („X von 10 / 100 / 1000 weisen ein bestimmtes Merkmal auf ..."). In Abbildung 3.2 wird auf verständliche Weise über Nutzen und Risiken der Prostatakrebsvorsorge berichtet (Harding Center for Risk Literacy, 2014).

Diese natürliche, analoge Repräsentation von Häufigkeiten, Verhältnissen oder Wahrscheinlichkeiten hat sich als besonders geeignet herausgestellt, um über Risiken aufzuklären (Gaissmaier u. a., 2012; Gigerenzer, 2013; Garcia-Retamero u. a., 2010; Kurz-Milcke u. a., 2008; Spiegelhalter u. a., 2011). Dabei profitieren nicht nur Menschen mit Defiziten im Umgang mit Zahlen; es konnte in einigen Studien gezeigt werden, dass auch Ärzte und Juristen von diesen Darstellungen profitieren, wenn es etwa um die Einschätzung der Zuverlässigkeit medizinischer Tests oder DNA-Analysen geht (Krauss & Hertwig, 2000). Dies hat damit zu tun, dass die dafür benötigten bedingten Wahrscheinlichkeiten und damit zusammenhängende bayesianische Schlussfolgerungen schwierig zu interpretieren

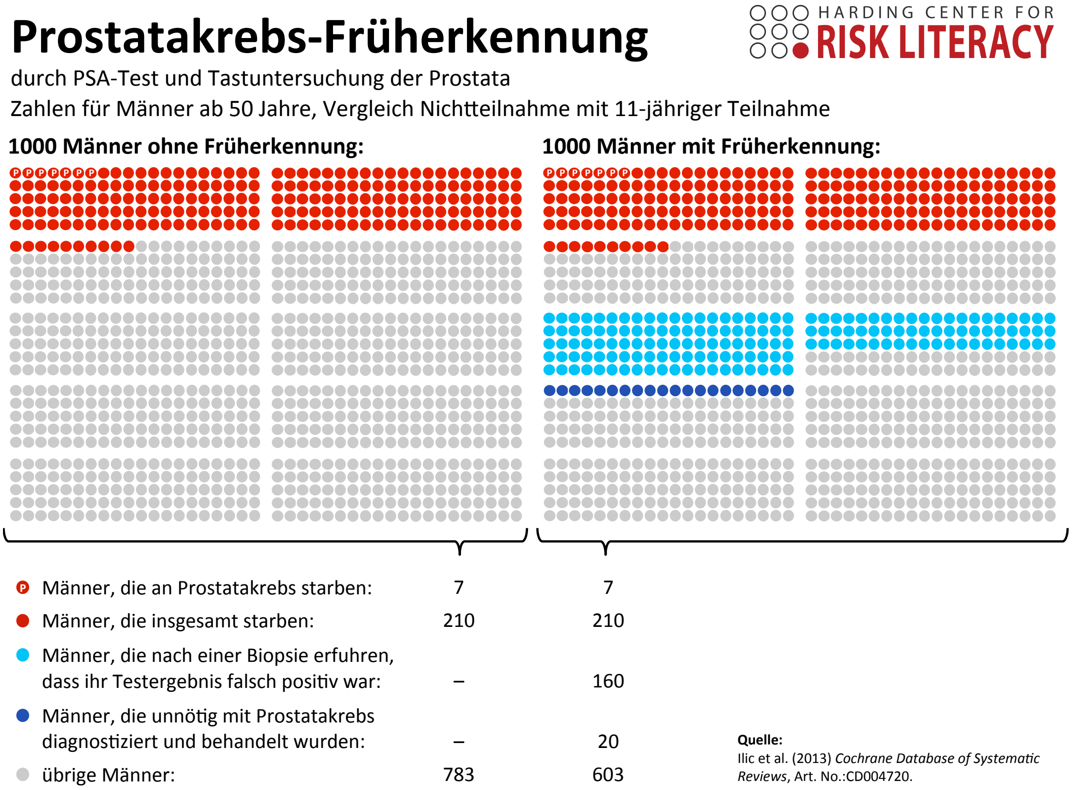


Abbildung 3.2: Nutzen und Risiken der Prostatakrebs-Früherkennung

sind, solange sie nur formal beschrieben werden (Brase, 2008). In ganz speziellen Piktogrammen – den Populationsdiagrammen – lässt sich beispielsweise die Verteilung von Merkmalsträgern und Merkmalen übersichtlich darstellen. Informationen über Prävalenz, Sensitivität und Spezifität bei Krankheitsdiagnostiken lassen sich aus dem Diagramm ablesen und auch Problematiken falsch-positiver Testresultate gehen aus solchen Darstellungen hervor. Dafür muss lediglich die Zahl der kranken Personen mit positivem Testergebnis ins Verhältnis zu allen Personen mit positiven Testergebnis gesetzt werden.

Derartige Darstellungen erleichtern den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und eignen sich daher für einen frühen Einsatz beim Erlernen elementarer stochastischer Konzepte. Wie die Forschung zeigt, gibt es im Zusammenhang mit dem Verstehen wahrscheinlichkeitstheoretischer Phänomene viele Fehlvorstellungen bei Erwachsenen, Jugendlichen und Kindern (Batanero, Godino, Vallecillos, Green & Holmes, 1994; Ben-Zvi & Garfield, 2008; Garfield & Ahlgren, 1988; Kapadia, 2009; Kahneman, 2011). Leitend für die vorliegenden Arbeit ist die Tatsache, dass viele dieser Fehlvorstellungen auf ungeeignete numerische Formate zurückzuführen sind. Natürliche Formate wie etwa die natürlichen Häufigkeiten werden hingegen intuitiv wahrgenommen und sind daher verständnisfördernd. Im nächsten Kapitel werden die angedeuteten Schwierigkeiten thematisiert, die sich beim Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und Urteilen unter Unsicherheit beobachten lassen.

3.1.1 Wahrscheinlichkeiten und Risiken

Man spricht von einem Risiko, wenn in einer Situation der Unsicherheit mindestens ein Ereignis mit einem Verlust an Ressourcen (Geld, Zeit, Gesundheit) verbunden ist (Latten, Martignon, Monti & Multmeier, 2011). Berechnet wird ein Risiko, indem man Eintrittswahrscheinlichkeit und Schadensausmaß miteinander multipliziert (Campbell, 2005). Beide Dimensionen – Wahrscheinlichkeit und Schaden – bestimmen demnach die Höhe eines Risikos und müssen in schwierigen Entscheidungen unter Unsicherheit abgewogen werden. In den meisten Situationen stehen uns mehrere Handlungsoptionen offen; jede Option beinhaltet jeweils einen Schaden und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit und es gilt *die* Option zu wählen, die sich für die eigene Zielsetzung am *günstigsten* erweist. Dieser sogenannte *trade-off* erfordert nicht nur die Abschätzung von Konsequenzen verschiedener Handlungen, sondern auch die Kompetenz eines sachgerechten Umgangs mit Wahrscheinlichkeiten. Kapadia (2009) fasst mit Wahrscheinlichkeiten verbundene Fehlvorstellungen in einer Liste zusammen. Einige dieser Aussagen (1, 2, 3 und 8) werden anschließend herausgegriffen und erläutert, da sie insbesondere für *Risiko* relevant sind.

1. People use personal experience in assessing chance in a rather haphazard manner
2. People process information in a rather incomplete way
3. People find it hard to assess probabilities which are very low or very high
4. People do not assign values of 0 for impossibility and 1 for certainty
5. People equate certainty and impossibility with physical rather than logical events
6. People equate 50-50 chance with coin tossing
7. People assign equal likelihood in unknown situations
8. People are incoherent in assigning and in processing probabilities
9. People are supra-additive

(1) Persönliche Erfahrung bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten
Wie im vorherigen Kapitel bereits aufgezeigt, bestimmen persönliche Erfahrungen die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten und somit Urteile unter Unsicherheit (Kahneman, 2011). So wird etwa die Wahrscheinlichkeit, Opfer einer Gewalttat zu sein, als sehr hoch eingeschätzt, wenn man kürzlich einen Bericht über einen Mord gelesen hat. Derartige kognitive Verzerrungen sind starke Abweichungen von objektiven Wahrscheinlichkeiten (Kahneman, 2011). Dieser sogenannte „Verfügbarkeitsfehler" erklärt auch die in der Einleitung dargestellten unbegründete Paniken und Ängste vieler Menschen. Das menschliche Verhalten deswegen als „irrational" zu bezeichnen, wird der Komplexität der Umwelt und den kognitiven Mechanismen jedoch nicht gerecht. Ein Theoriekonzept, welches sich mit derartigen Fragen auseinandersetzt, ist das der „begrenzten Rationalität" (Gigerenzer & Gaissmaier, 2011; Gigerenzer & Selten, 2001).

Dass Wahrscheinlichkeiten stark von persönlichen Erfahrungen abhängen, zeigt sich auch bei Zufallsexperimenten. Für den Ausgang eines Zufallsexperiments sind dann oft die eigene Gedankenkraft, höhere Mächte oder etwa das persönliche Unvermögen verantwortlich (Büchter, Hußmann, Leuders & Prediger, 2005; Wollring, 1995). Ebenso beeinflusst die unmittelbar vor einem Experiment gemachte Erfahrung das Urteil: Wirft ein Kind eine Münze und die Münze zeigt fünf mal hintereinander „Kopf", so wird das Kind die Wahrscheinlichkeit für „Zahl" für den sechsten Wurf als sehr hoch einschätzen (Stichwort: Gambler's Fallacy).

(2) Unvollständige Verarbeitung von Information
Informationen können vom Menschen aufgrund ihrer Komplexität nie vollständig aufgenommen und verarbeitet werden. Im Forschungsgebiet der ökologischen Rationalität beschäftigt man sich mit „Kognitiven Heuristiken", die helfen können, schnelle, sparsame, transparente und robuste Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen (Gigerenzer & Gaissmaier, 2011). Man nimmt an, dass sich der Mensch in vielen Problemsituationen nicht analytisch verhält und daher auch nicht Wahrscheinlichkeiten berechnet und daher auch keinen sogenannten „erwarteten Nutzen" maximiert. Vielmehr greifen wir oft auf Heuristiken zurück, die uns in Situationen des begrenzten Wissens zu guten Lösungen verhelfen. Dies ist möglich, da diese Heuristiken auf evolvierte und erlernte Fähigkeiten zurückgreifen können (Gigerenzer & Gaissmaier, 2011).

Was heißt dies in Bezug zum Umgang mit Wahrscheinlichkeiten? Daraus sollte keineswegs abgeleitet werden, dass wir uns nicht mehr mit Wahrscheinlichkeiten beschäftigen sollten. Wenn Zeit und Wissen begrenzt sind, können einfache Faustregeln durchaus zu guten Entscheidungen und Ergebnissen führen (Gigerenzer & Gaissmaier, 2011). Es gibt jedoch durchaus Situationen, in denen es ratsam ist, Kosten und Nutzen aufgrund von Daten abzuwägen und Wahrscheinlichkeiten bei der Entscheidungsfindung heranzuziehen. Etwa bei Fragen der Nützlichkeit von Vorsorgeuntersuchungen, bei welchen Evidenzen für Chancen und Risiken in Form von Studien vorliegen.

Darüber liegt die Vermutung nahe, dass sich ein geschultes „Gespür für zufällige Prozesse" und angesprochene Heuristiken ergänzen könnten. Desweiteren werden durch die frühe, natürliche Begegnung mit statistischen und probabilistischen Konzepten nicht nur stochastische Grundbegriffe, sondern auch Kompetenzen wie kritisches Denken gefestigt (Aizikovitsh-Udi & Kuntze, 2014).

(3) Schwierigkeiten mit kleinen und großen Wahrscheinlichkeiten
Die Beurteilung von Risiken und Wahrscheinlichkeiten wird noch schwieriger, wenn besonders große und besonders kleine Wahrscheinlichkeiten eingeschätzt werden müssen. Sehr kleine Wahrscheinlichkeiten deuten auf sehr seltene Ereignisse hin und werden sehr schnell mit unmöglichen Ereignissen gleichgesetzt. Sehr große Wahrscheinlichkeiten assoziiert man wiederum mit Sicherheit. Dies erschwert die Einschätzung von zufälligen Ereignissen. Werden diese Wahrscheinlichkeiten in Form von Prozenten ausgedrückt, so kann es schnell passieren, dass Wahrscheinlichkeiten von 0.01 % und 0.1 % als ähnlich wahrscheinlich eingeschätzt werden. Beispiele für die praktische Relevanz dieser Tatsache beschreibt Nassim Taleb in seinem Buch *Der schwarze Schwan. Die Macht höchst unwahrscheinlicher Ereignisse* (Taleb, 2010).

(8) Probleme beim Verarbeiten von Wahrscheinlichkeitsformaten
Es wurde bereits angedeutet, dass sich bestimmte Repräsentationen numerischer Infor-

mation besser verarbeiten lassen als andere (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). Wahrscheinlichkeiten in Form von Prozenten, Bruch- oder Dezimalzahlen bereiten dem Menschen Schwierigkeiten, da unser Denkapparat auf diese Formate (noch) nicht adaptiert ist (Sedlmeier, 2001). Diese Tatsache ist nicht unerheblich für die Schwierigkeiten für den Umgang mit Risiken im Alltag. Selbst wenn sich Menschen den kognitiven Verzerrungen bewusst sind, zuverlässige Quellen auffinden und in diesen relevante Information für das eigene Entscheidungsproblem zu finden, so ist noch nicht gewährleistet, dass die Information auch adäquat verstanden und interpretiert wird. Die psychologische Forschung hat dazu beigetragen, dass in vielen Bereichen der Risikokommunikation Häufigkeitsformate eingesetzt werden.

Im schulischen Unterricht hat sich der Einsatz von Häufigkeitsformaten leider noch nicht in der Weise behaupten können, wie von vielen Psychologen erhofft. Vor allem im Grundschulbereich kann der Einsatz intuitiver Darstellungsformate den Stochastikunterricht bereichern (Martignon & Kurz-Milcke, 2006a). Doch auch in der Sekundarstufe können Schülerinnen und Schüler mithilfe von Häufigkeitsformaten viele stochastische Phänomene leichter durchdringen (Sedlmeier, 2001; Wassner, 2004).

Die Kerngedanken des bisherigen Abschnitts werden in Form zweier Aussagen zusammengefasst. Die beiden Aussagen sind leitend für die vorliegende Dissertationsschrift.

- Die Risikowahrnehmung in der allgemeinen Öffentlichkeit ist oftmals verzerrt. Risiken sollten auf eine verständliche Art und Weise in Form von Häufigkeitsformaten dargestellt werden, da diese unseren kognitiven Verarbeitungsmechanismen nachempfunden sind.

- Neben dieser transparenten Kommunikation von Risiko kommt einer frühen Förderung von Risikokompetenz eine enorme Bedeutung zu. Dies nicht zuletzt aufgrund einer Welt, in der Daten und der kompetente Umgang mit diesen eine immer größere Rolle spielen.

Im folgenden Abschnitt wird das Konstrukt der Risk Literacy mit seinen unterschiedlichen Dimensionen näher betrachtet. Es soll daraus hervorgehen, dass Risk Literacy ein Kompetenzkonstrukt darstellt, das nicht nur mathematische oder stochastische Fertigkeiten, sondern darüber hinaus emotionale und affektive Komponenten wie psychische Dispositionen beinhaltet. Zudem werden exemplarisch Bereiche genannt, in welchen Risikokompetenz zum Tragen kommt.

3.1.2 Förderung von Kompetenzen im Umgang mit Risiken – Risk Literacy

Fähigkeiten und Fertigkeiten, Risiken einzuschätzen, zu beschreiben und auf Grundlage von Daten mit diesen argumentativ umgehen zu können, sind Kernelemente von Risk Literacy (Schiller & Kuntze, 2012). Risikokompetenz bedeutet demnach, in Situationen unter Unsicherheit bewusste und nachhaltige Entscheidungen treffen zu können. Dabei sollten Daten als Entscheidungsgrundlage dienen (Engel, 2007). Gal (2012) definiert *Probability Literacy* als „ability to access, use, interpret, and communicate probability-related information and ideas, in order to engage and effectively manage the demands of real-world roles and tasks involving uncertainty and risk (p. 4)“. Es geht vorwiegend um den richtigen und kompetenten Gebrauch und Umgang mit statistischen Daten, um sich in einer Welt voller Unsicherheiten und Risiko zurechtzufinden. Risk Literacy umfasst daher Kompetenzen, die weit über mathematische Fertigkeiten wie das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten hinausgehen. Zu einem kompetenten Umgang mit Risiko gehören auch (mit Verzicht auf Vollständigkeit) Bereiche wie:

- Faktenwissen: Was ist wirklich gefährlich/schädlich? Wie kann ich mich davor schützen?
- Begriffswissen: absolutes und relatives Risiko, Unsicherheit/Ungewissheit
- Psychische Disposition: Akzeptanz von Unsicherheit und Ungewissheit
- Mathematische Fertigkeiten: Umgang und Verarbeitung von Zahlen
- Stochastische Fertigkeiten und stochastisches Denken

Somit ist Risk Literacy ein Konstrukt, welches Kompetenzen aus sehr unterschiedlichen Domänen beinhaltet. Ein adäquater Umgang mit Risiko setzt Faktenwissen voraus. In welchen Situationen sind wir welchen Risiken ausgesetzt? Welche Verhaltensweisen bedingen ein hohes Risiko? Ist es beispielsweise gefährlich, neben einem Telefonmasten zu wohnen? Faktenwissen zu Risiko findet man in vielen Bereichen des Lebens. Gal (2005) nennt (Auswahl): Natur (Wetter, Evolution), Technologie (Qualitätsmanagement, Produktion), menschliches Verhalten (Sport, Transport), Medizin (genetische Krankheiten, Krebsrisiken), Rechtsmedizin (Wahrscheinlichkeiten bei DNA-Analysen), Wirtschaft (Investments, Versicherungen), Gesundheit (Schutzimpfungen) oder Glücksspiele (Lotterie).

Darüber hinaus spielt Begriffswissen eine Rolle. Was ist etwa der Unterschied zwischen einem relativen und einem absoluten Risiko? Die korrekte Einordnung von Begrifflichkeiten ist maßgeblich für die korrekte Interpretation von Risiken, die in den Medien präsentiert werden. Warnen Experten vor einem Medikament, indem sie sich auf eine relative Risikoerhöhung für Nebenwirkungen um 80 % berufen, sollte jede Patientin und jeder Patient dies verstehen.

Risikokompetent zu sein, bedeutet auch, sich der „Illusion der Gewissheit“ bewusst zu werden. In jeglichen Situationen des alltäglichen Lebens sind wir Risiken ausgesetzt, die wir zwar durch bestimmte Verhaltensweisen reduzieren können; wir können sie jedoch niemals eliminieren. Dies zu akzeptieren, stellt für viele Menschen eine große

Herausforderung dar, da bestimmte deterministische Überzeugungen bezüglich Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen abgelegt werden müssen. Zu psychischen Dispositionen sollen an dieser Stelle auch Wertvorstellungen und Einstellungen gezählt werden. Im Kontext von Risiko kommt der mündigen, freien Entscheidung, was von einem Menschen wann getan werden soll, eine große Bedeutung zu. Diese Erziehung zur „mündigen Entscheidungsfindung“ richtet sich gegen den *Paternalismus*, mit dem das Ziel verbunden sein kann, die Menschen auf subtile Art und Weise zu einem bestimmten Verhalten zu bringen (Gigerenzer, 2013).

Mathematische Fertigkeiten werden benötigt, wenn numerische Information verarbeitet werden muss. Im angloamerikanischen Sprachraum wird dafür oft der Begriff *Numeracy* verwendet (Cokely, Galesic, Schulz, Ghazal & Garcia-Retamero, 2012). Wird Risiko A mit *1 kranke Person von insgesamt 10 Personen* dem Risiko B *1 kranke Person von insgesamt 100 Personen* gegenübergestellt, muss klar sein, dass die größere Zahl (*100*) nicht mit dem größeren Risiko einhergeht.

Eng verwandt und daher nicht scharf von den mathematischen Fertigkeiten zu trennen, sind stochastische Fertigkeiten und das stochastische Denken. Dazu gehören jegliche inhaltliche und prozessorientierte Kompetenzen, die einen selbstbewussten und eigenständigen Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und Daten erlauben. Das wohl bekannteste Konstrukt für ein Bündel an Kompetenzen, welches insbesondere auf das *Lesen, Darstellen und Interpretieren von Daten* gerichtet ist, ist die *Statistical Literacy* (Wallman, 1993). Kernelement von Statistical Literacy ist die Fähigkeit, statistische Information kritisch zu evaluieren und zugleich anzuerkennen, welchen Beitrag Statistik im Leben der Menschen leistet (Watson & Callingham, 2003). Ein Überblick dazu, in welche Bereiche statistisches Denken eingeteilt werden kann, gibt delMas (delMas, 2002).

Im folgenden Kapitel wird der Beitrag vorgestellt, den der Mathematikunterricht der Grundschule für eine frühe Förderung von Risk Literacy leisten kann. Es wird aufgezeigt, mit welchen Werkzeugen elementare Kompetenzen zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit angebahnt werden können. Eines dieser Werkzeuge sind die bereits angesprochenen natürlichen Häufigkeitsformate, die es Schülerinnen und Schülern auf intuitive Art und Weise erlauben, erste Quantifizierungen von Risiko vorzunehmen. Um besser zu verstehen, wie eine Unterrichtseinheit zum Thema Risiko im Mathematikunterricht der 4. Jahrgangsstufe aussehen sollte, wird im nächsten Kapitel das stochastische Denken von Kindern beleuchtet. Daraus wird hervorgehen, dass Kinder im Grundschulalter bereits gute Intuitionen zu diversen stochastischen Konzepten mit in den Unterricht bringen; diese zielführenden Heuristiken können beim stochastischen Problemlösen auch von Fehlvorstellungen und Fehlkonzepten gestört werden.

Zusätzlich wird argumentiert, warum sich das Thema Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit optimal in den Bildungsstandards der Primarstufe verorten lässt. Die konkreten Inhaltsbereiche der Unterrichtseinheit werden vorgestellt und begründet, warum sie einerseits wichtig für die mathematische Modellierung von Risiko wichtig sind, andererseits wird begründet, warum und wie sich diese Bereiche bereits in der vierten Grundschulklasse thematisieren lassen.

3.2 Stochastik in der Grundschule

Die enorme Bedeutung einer stochastischen Grundbildung kann nicht von der Hand gewiesen werden. Aus diesem Grund wurde der Bereich Daten und Zufall sowohl in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz von 2004 (KMK, 2004) als auch in den Bildungsplänen der Bundesländer verankert und wurde somit verbindliches Bildungsziel. Die beschreibende Statistik hat inzwischen Einzug in viele deutsche Klassenzimmer gehalten. Konzepte der Wahrscheinlichkeit werden hingegen oft als weniger relevant eingeschätzt (Borovcnik & Kapadia, 2009). Darüber hinaus sind sich viele Lehrkräfte unsicher, was das Unterrichten von elementaren Wahrscheinlichkeitskonzepten angeht (Martignon & Wassner, 2005; Neubert, 2012).

Ziel ist der Aufbau eines tragfähigen Grundverständnisses zu wichtigen Konzepten aus Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Anders als wie lange Zeit angenommen, kann ein elementarer Zugang zu wichtigen stochastischen Konzepten jedoch bereits in der Grundschule erfolgen. Zwar ist man hier noch weit weg vom kalkülhaften formalen Berechnen statistischer Kennwerte, da einige Werkzeuge wie Prozente und Brüche noch nicht zur Verfügung stehen. Anhand geeigneter Darstellungsformate wie den natürlichen Häufigkeiten und ikonischen Darstellungen lassen sich jedoch spielerisch viele Phänomene zum Zufall entdecken. In den folgenden Abschnitten werden die bereits erwähnten stochastischen Primärintuitionen noch einmal näher betrachtet. Dazu werden einige Ergebnisse wichtiger mathematikdidaktischer und psychologischer Studien zum probabilistischen Verständnis von Kindern vorgestellt. Darüber hinaus werden die Bildungsstandards näher betrachtet und eine mögliche Vernetzung dieser zum Thema Risiko hergestellt. Das Kapitel schließt mit Vorbehalten gegenüber der Grundschulstochastik ab. Dies geschieht in Form von provokativen Thesen, die widerlegt werden. Die Argumentation gegen diese Thesen ist zugleich Motivation der durchgeführten Studie.

3.2.1 Stochastisches Denken – Intuitionen und Fehlkonzepte

> Supporting students' development of coherent probabilistic reasoning entails conceiving of probability as ways of thinking, instead of as a set of disconnected concepts and skills. (p. 393) (Saldanha & Liu, 2014)

Stochastisches Denken ist weitaus mehr als das Verinnerlichen von speziellen Fertigkeiten und Konzepten in der Stochastik. Stochastisches Denken ist im weitesten Sinne ein Zugang zu den Phänomenen des Lebens, der die Unvorhersehbarkeit vieler um uns herum ablaufender Prozesse berücksichtigt. Diese Zufälligkeit vieler Ereignisse im Leben des Menschen muss nicht nur erkannt, sondern ebenso auch akzeptiert werden. Wird diese erkannt und akzeptiert, muss sie auch verstanden werden. Wesentlich dafür ist die Einsicht, dass der Ausgang eines einzelnen zufälligen Vorgangs nicht vorhergesagt werden kann; wird derselbe Vorgang jedoch beliebig oft wiederholt, so können gute Abschätzungen für die Ausgänge des Vorgangs getätigt werden. Die Struktur des Zufalls wird also erst durch die Hintereinanderausführung des Zufallsvorgangs ersichtlich.

Bereits Kinder im Alter von vier Jahren zeigen Ansätze zum Erfassen von Wahrscheinlichkeit (Yost, Siegal & Andrews, 1962). Stochastisches Denken kann daher schon sehr früh im Kindergarten oder in der Grundschule angebahnt werden. In sehr vielen Spielsituationen werden Kinder mit Zufallsprozessen konfrontiert (Büchter u. a., 2005). Beim Karten- oder Würfelspiel zeigen sich dann oftmals typische Fehlvorstellungen, wenn etwa der Augenzahl *6* geringere Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden als den jeweiligen anderen Augenzahlen. Bryant und Nunes (2012) nennen vier Felder kognitiver Anforderungen, welchen bei der frühen Begegnung mit der Stochastik gemeistert werden müssen:

- Verstehen von Zufälligkeit
- Alle möglichen Ergebnisse bei Zufallsprozessen herausarbeiten
- Wahrscheinlichkeiten quantifizieren und vergleichen
- Beziehungen und Korrelation zwischen Ereignissen verstehen

Um elementare Kompetenzen in diesen vier Feldern zu erwerben, müssen drei wichtige Schritte gegangen werden (Bryant & Nunes, 2012). Im ersten Schritt muss die Einsicht erfolgen, dass es sich beim vorliegenden Problem um etwas handelt, bei dem die Ereignisse im Vorfeld nicht vorhergesagt werden können. Im zweiten Schritt müssen alle möglichen Ergebnisse herausgearbeitet werden. Dabei gilt zu beachten, dass es sich nicht immer um Ergebnisse (Elementarereignisse) handelt, die mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten. Der dritte Schritt besteht aus der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten. Der vierte Schritt ist nicht immer notwendig. Hier geht es um Beziehungen zwischen Ereignissen. Die große Frage lautet, ob sich Ereignisse gegenseitig beeinflussen oder ob dies mit dem Zufall erklärt werden kann.

Elementare Kompetenzen zu diesen Bereichen können früh erworben werden; schon Babys im Alter von einem Jahr zeigen erste Anzeichen probabilistischen Denkens (Denison & Xu, 2013). Eine Reihe weiterer entwicklungspsychologischer Studien aus der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts belegt, dass Kinder - wenn ihnen die Spielsituation vertraut ist - erste Formen stochastischen Denkens zeigen (Piaget & Inhelder, 1975; Yost u. a., 1962; Falk, Yudilevich-Assouline & Elstein, 2012; Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein u. a., 1970a, 1970b). Dieses intuitive Wissen tritt in der Gestalt von Heuristiken oder stochastischen Intuitionen zutage (Fischbein u. a., 1970a). Einige Autoren unterscheiden zwischen primären und sekundären Intuitionen (Fischbein u. a., 1970a; Tietze, Klika & Wolpers, 2002). Zu den primären Intuitionen gehören Vorstellungen, die sich aus individuellen Vorerfahrungen speisen, sich jedoch ohne vorangegangener Auseinandersetzung mit einem Thema entwickeln (Tietze u. a., 2002). Sekundäre Intuitionen sind das Resultat einer systematischen Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt. Bei der Herausbildung dieser Vorstellungen werden primäre Intuition und formale Konzepte in Verbindung gebracht (Tietze u. a., 2002).

Zu den bekanntesten Vertretern der psychologischen Forschung zum stochastischen Denken im Kindesalter gehört der Entwicklungspsychologe Jean Piaget. Zusammen mit seiner Kollegin Bärbel Inhelder entwickelte er eine Theorie über die Vorstellungen von Kindern zum Konzept des Zufalls. Nach ihrer Auffassung entwickeln Kinder probabilistische

Konzepte in drei aufeinanderfolgenden Stufen. Diese strenge hierarchische Stufenfolge wurde von vielen Psychologen jedoch scharf kritisiert. Die Aussagen der Studien von Piaget sind aufgrund methodischer Schwächen seiner Studien angreifbar. Nichtsdestotrotz hat Piaget die Erforschung der kognitiven Prozesse bei Kindern in Zusammenhang mit Zufall geprägt.

Da Wahrscheinlichkeiten in Form von Verhältnissen beschrieben werden, müssen Kinder beim Wahrscheinlichkeitsvergleich diese multiplikativen Prinzipien berücksichtigen. Das heißt, sie müssen lernen, proportional zu denken. Dies ist eine große Herausforderung, da das Denken in Verhältnissen mit einigen Fehlkonzepten verknüpft ist, die sich auch noch bei Erwachsenen zeigen (Bryant & Nunes, 2012). Zu den Fehlkonzepten gehört beispielsweise das Ausblenden wichtiger Größen im Verhältnis, wenn Wahrscheinlichkeiten verglichen werden. Doch auch wenn die Notwendigkeit erkannt wird, alle Größen in einem Verhältnis zu betrachten, so werden diese mitunter fälschlicherweise nach additiven statt nach multiplikativen Regeln miteinander „verrechnet“ (Falk u. a., 2012; Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein u. a., 1970a).

Den probabilistischen Intuitionen stehen aber auch Fehlvorstellungen gegenüber. Während einige mit wachsendem Alter des Kindes verschwinden, so gibt es auch robuste Fehlvorstellungen zur Zufälligkeit von Ereignissen (Kahneman, 2011). Eine sehr weit verbreitete Fehlvorstellung hat mit der Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Ereignisse zu tun. Sowohl Kinder als auch Erwachsene neigen dazu, Zufallsgeneratoren eine Art „Gedächtnis“ zuzuschreiben. Die Ausgänge der vorherigen Zufallsexperimente beeinflussen jedoch keineswegs den Ausgang des aktuellen Experiments. Dies macht die Stochastik gerade so interessant, da normative Ergebnisse und Gefühl oftmals voneinander abweichen. Springt die Kugel im Rouletterad im Kasino fünf Mal in Folge auf ein rotes Feld, so wird sie beim 6. nicht eher auf ein schwarzes springen. Ein Großteil der Fehlvorstellungen ist mit Kontrollillussionen verbunden, die besagen, stochastische Ergebnisse seien durch Fertigkeiten beeinflussbar. Dabei ist das Ziel die Maximierung der eigenen Erfolgswahrscheinlichkeit (Lorenz, 2014).

Wollring (1995) beschreibt eine Reihe verschiedener Verständnisvarianten zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Dazu gehört die *animistische Wahrscheinlichkeitsvorstellung*, die besagt, dass das Ergebnis von Zufallsexperimenten durch ein Wesen mit personalen Eigenschaften bestimmt wird. Daneben nennt Wollring das *a priori-Verständnis*, welches die Auffassung zu Beginn einer Spielhandlung beschreibt. Befinden sich in einer Urne beispielsweise fünf rote und ein blauer Würfel, werden den Ereignissen „Würfel ist rot“ und „Würfel ist blau“ die gleichen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Wird das Zufallsexperiment nun wiederholt und es wird häufiger ein roter Würfel gezogen, so kann die falsche Annahme einer Gleichverteilung revidiert werden. Als dritte Verständnisvariante nennt Wollring die *frequentistische Wahrscheinlichkeit*, bei der versucht wird, aufgrund der bisherigen Versuche Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen. Dies passiert durch die Betrachtung der relativen Häufigkeiten. Im Beispiel wird dem Ereignis „Würfel ist blau“ nach einigen Spielhandlungen etwa die Wahrscheinlichkeit von *2 von 10* zugeordnet. Als vierten und fünften Punkt nennt Wollring die *subjektiven und intuitiven Wahrscheinlichkeiten* als Ausdruck persönlicher Überzeugungen und die *formale Wahrscheinlichkeit*, die aus mathematischen Gesetzen abgeleitet wird. Mit Ausnahme der formalen Wahrscheinlichkeit sind alle Wahrscheinlichkeitszugänge bei Kindern im Grundschulalter erkennbar (Lorenz, 2014). Es existiert dabei weder eine Stufenfolge, noch lassen sich die benannten Komponenten scharf voneinander trennen. Welche Sicht vom Kind auf die stochastische Situationen eingenommen wird, richtet sich meistens nach der Art der Spiel- oder Handlungssituation. Die verschiedenen Varianten des Wahrscheinlichkeitsverständnisses können durchaus auch vermischt und parallel auftreten (Lorenz, 2014).

3.2.2 Die Stochastik in den Bildungsstandards

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004) führen verschiedene inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen auf, die Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer Grundschule erworben haben sollen. Diese gliedern sich in fünf zentrale Leitideen:

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Der Stochastikunterricht der Grundschule ist somit in die Bereiche *Daten*, *Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* gegliedert (KMK, 2004). Diese Bereiche sind eng miteinander verzahnt und sollten, nach den Bestimmungen der neuen Bildungslehrpläne, daher nicht unabhängig voneinander unterrichtet werden: Wahrscheinlichkeiten helfen, Ergebnisse von Zufallsvorgängen vorherzusagen. Beim Wiederholen desselben Zufallsexperiments können dann die gewonnenen Daten in Form von absoluten oder relativen Häufigkeiten kommuniziert werden. Schülerinnen und Schüler sollten im Laufe ihrer Grundschulzeit lernen, Häufigkeitstabellen und Diagramme zu erstellen, lesen und interpretieren und Gewinnchancen bei verschiedenen Zufallsvorgängen einschätzen (KMK, 2004). Die Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit ist aufgeteilt in die Bereiche *Daten erfassen und darstellen* und *Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen.* Diese Aufteilung ist der Definition der Stochastik nachempfunden, die sich ebenso in die *Beschreibende Statistik* und die *Wahrscheinlichkeit* aufgliedern lässt (Wikipedia-Autoren, 2014c). Schülerinnen und Schüler sollen „(...) in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (...)“ und aus diesen wiederum „(...) Informationen entnehmen.“ Für den Bereich Wahrscheinlichkeit ist in den Bildungsstandards zu lesen, dass Schülerinnen und Schüler „Grundbegriffe kennen [z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich] [und] (...) Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten [z. B. Würfelspielen] einschätzen.“ (KMK, 2004).

Die Bundesländer haben sich im Jahre 2004 dazu verpflichtet, die von der ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) vorgeschlagenen Bildungsstandards zu implementieren und anzuwenden (KMK, 2004). Mit Blick auf die Bildungspläne der einzelnen Bundesländer ergibt sich folgendes Bild:

Das Teilgebiet der Statistik ist in allen Bildungsplänen enthalten. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung taucht entweder gar nicht auf oder sollte ab Klasse 3 oder 4 unterrichtet werden (Kurtzmann & Sill, 2012). In welchem Maße sich Lehrkräfte an diese eigentlich verbindlichen Vorgaben der Bildungspläne halten, kann nur schwer überprüft werden.

Der Stellenwert der Stochastik bei Mathematiklehrkräften ist trotz alledem hoch. Dies geht aus der Studie von Martignon und Wassner (2005) hervor, in welcher der Großteil der befragten Gymnasiallehrkräfte die lebensweltliche Bedeutung der Stochastik sieht. Über die Hälfte der Teilnehmer spricht sich darüber hinaus für einen Stochastikunterricht in der Unterstufe aus (vor der 8. Klasse) und etwa ein Fünftel schlägt die 4./5. Klasse als geeignet vor. Eine auch für die vorliegende Arbeit wichtige Erkenntnis aus der Studie ist die Tatsache, dass die Lehrkräfte ihre Schülerinnen und Schüler im Stochastikunterricht aufmerksamer, interessierter und auch motivierter einschätzen als im sonstigen Mathematikunterricht (Martignon & Wassner, 2005). Gleichzeitig sind sie der Auffassung, dass stochastische Themen von den Kindern nicht so leicht durchdrungen werden wie sonstige mathematische Probleme. Die Autoren der Studie vermuten, dass die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim stochastischen Problemlösen auf die fehlende natürliche und spielerische Auseinandersetzung im Kindesalter zurückgeführt werden könnte. In der Sekundarstufe werden Schülerinnen und Schüler oftmals mit formalen Konzepten konfrontiert, ohne dass sich zuvor „kontinuierlich gereifte Heuristiken" ausbilden konnten (Martignon & Wassner, 2005).

An dieser Stelle sollen häufig genannte Vorbehalte zum Lehren und Lernen stochastischer Inhalte in Thesen gefasst und anschließend diskutiert werden.

> „Wahrscheinlichkeiten werden in Form von Prozenten oder Brüchen ausgedrückt, die üblicherweise erst in der Sekundarstufe eingeführt werden. Daher muss man sich im Unterricht der Grundschule auf rudimentäre qualitative Beschreibungen von Wahrscheinlichkeiten beschränken."

In der Tat sollten in einem altersadäquaten Stochastikunterricht in der Grundschule elementare wahrscheinlichkeitstheoretische Konzepte spielerisch entwickelt werden. Statt formalem Kalkül geht es dabei um eine handlungsorientierte heuristischen Begegnung mit Zufallsphänomenen; Heuristiken nicht im Sine von Faustregeln sondern als intuitive zielführende Strategien beim Problemlösen (Polya, 1957). Kinder bringen meist eigene Vorstellungen von Zufall mit in den Unterricht. Diese Alltagsvorstellungen zum Zufall sollten dabei ernst genommen werden und zum Ausgangspunkt des Lernens gemacht werden (Büchter u. a., 2005).

Der Stochastikunterricht in der Grundschule muss sich jedoch nicht auf die in der These erwähnten rudimentären qualitativen Beschreibungen von Wahrscheinlichkeiten beschränken. Die Tatsache, dass Schülerinnen und Schüler noch nicht über Prozent- oder Bruchzahlbegriff verfügen (Ausnahme Stammbrüche), stellt dabei kein Hindernis dar. Quantitative Beschreibungen von Wahrscheinlichkeiten können vorgenommen werden, indem man auf natürliche Häufigkeiten zurückgreift. Befinden sich beispielsweise in einer Urne 2 rote und 8 blaue Würfel, erkennen Kinder nicht nur recht schnell, dass die Wahrscheinlichkeit für blau größer ist. Sie verstehen ebenso, wenn die „Wahrscheinlichkeit für *blau*“ als *8 von 10* ausdrückt wird. Darüber hinaus können Kinder viele weitere wichtige Kompetenzen erwerben, wie etwa die stochastische Unabhängigkeit, Variabilität oder Merkmalsverteilungen. Lindmeier und Reiss (2014) zeigen Befunde, die auf grundlegende Fähigkeiten des inferenzstatistischen Schließens von Grundschülerinnen und Grundschüler am Ende der 4. Jahrgangsstufe hindeuten.

> „Viele Schülerinnen und Schüler haben Defizite im Bereich Zahldarstellungen und Rechenoperationen. Erst wenn diese Kompetenzen gefestigt sind, kann man darüber nachdenken, stochastische Themen im Unterricht zu behandeln.“

Kompetenzen im Bereich Zahldarstellungen, Zahlbeziehungen und Rechenoperationen spielen in der Grundschule eine große Rolle. Die Förderung elementarer mathematischer Fertigkeiten wie das Wissen um den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems, den vier Grundrechenarten, Kopfrechenstrategien und mündlichen und halbschriftliche Rechenstrategien kommt eine große Bedeutung zu. Diese Kompetenzen sind der Leitidee Zahlen & Operationen zugeordnet (KMK, 2004). Es steht außer Frage, dass die Kompetenzen dieser Leitidee für den Aufbau eines tragfähigen Zahlbegriffs gerade im Grundschulbereich erworben werden müssen. Neben der Leitidee Zahlen & Operationen stehen jedoch vier weitere Leitideen, die Kompetenzen beinhalten, die nicht weniger wichtig sind. Die Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit enthält grundlegende Kompetenzen, die elementar für den Aufbau und die Entwicklung stochastischen Denkens sind.

> „Glücksspiele eignen sich für den Unterricht, da Kinder diesbezüglich Vorerfahrungen in außerschulischen Kontexten machen. Das Glücksspiel ist zwar ein motivierender Kontext, im Sinne eines realitätsnahen und anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts eignet sich dieser aber nur bedingt.“

Glücksspiele eignen sich hervorragend, um mit Kindern über stochastische Problemstellungen zu thematisieren. Kinder stellen Vermutungen über mögliche Ausgänge von Zufallsexperimenten auf und führen im Anschluss daran Experimente zur Überprüfung dieser selbstständig durch. Aufgrund der aufgetretenen Ergebnisse können dann die eigenen Vorstellungen von Zufall an die vorliegende Situation angepasst werden. Dies hilft, dass Fehlvorstellungen bezüglich zufälliger Ereignisse abgebaut werden (Lorenz, 2014). Anstatt das Glücksspiel als motivierenden Anlass zu sehen, um mit Kindern über Zufallsprozesse zu sprechen, wird die Stochastik hin und wieder mit dem Glücksspiel gleichgesetzt. Diese Reduzierung wird dem hohen Anwendungsbezug der Stochastik nicht gerecht. Ein Zugang zur Stochastik über Zufallsexperimente mit Münzen, Würfeln, Spielkarten und Glücksrädern bietet sich in der Grundschule an, da Kinder oftmals Vorerfahrungen mitbringen, die sie in ihrer Freizeit gesammelt haben (Büchter u. a., 2005). Dieser elementare Zugang zur Wahrscheinlichkeit kann und sollte nach einer gewissen Zeit durch die Ausweitung auf stochastische Phänomene ausgeweitet werden, bei welchen der Realitätsbezug sichtbar wird. Die anhand von Glücksspielen in der Grundschule diskutierten Phänomene werden dann im Sinne des Spiralcurriculums wieder aufgegriffen und formalisiert. Im Stochastikunterricht der Sekundarstufe bietet es sich dann an, mit realistischen Daten und Fakten zu arbeiten und wichtige Begrifflichkeiten zu klären. Es können eigene Erhebungen durchgeführt oder auf vorhandene große Datenbanken zurückgegriffen werden, um relevante Probleme etwa aus den Bereichen Umwelt, Politik, Sport oder Wirtschaft mithilfe statistischer Methoden zu klären.

3.2.3 Risiko als Inhaltsbereich in der Grundschulstochastik

Die Verankerung stochastischer Inhaltsbereiche in den Bildungsplänen der Primarstufe war ein großer Schritt. Dennoch haben Statistik und Wahrscheinlichkeit noch nicht den Stellenwert erreicht, der ihnen zusteht. Zum Teil dürfte dies auf die noch recht junge Geschichte der Schulstochastik als Teilgebiet der Mathematik zurückzuführen sein. Ein weiterer Grund mögen die beschriebenen Vorurteile und Vorbehalte vieler Lehrkräfte gegenüber diesem Inhaltsbereich sein. Wer selbst erst in der Oberstufe mit schwierigen formalen Konzepten der Wahrscheinlichkeitstheorie konfrontiert wurde, erkennt nicht sofort, warum und vor allem wie diese Inhalte auf spielerische Art in der Grundschule thematisiert werden können.

„Wozu muss ich Wahrscheinlichkeiten berechnen können. Ich gehe sowieso nie ins Kasino“. Ressentiments vor allem gegenüber der Wahrscheinlichkeitstheorie lassen erkennen, dass der hohe Anwendungs- und Realitätsbezug von Wahrscheinlichkeiten sehr oft nicht erkannt wird. Im Stochastikunterricht über die mathematische Modellierung von Risiko zu sprechen, könnte ein Weg sein, die Relevanz der Stochastik zu betonen. Glücksspiele und einfache deskriptive Statistiken haben nach wie vor ihre Berechtigung in der Grundschulstochastik. An dieser Stelle bietet es sich an, diese Inhalte zu erweitern, indem der Zufallsbegriff im Unterricht stärker aus Sicht von *Risikosituationen* und *Entscheidungsproblemen* betrachtet wird. Der persönliche Bezug eines jeden Kindes zum Risikobegriff bietet neben der inhaltlichen Auseinandersetzung mit den zugrundeliegenden mathematischen und stochastischen Konzepten Raum für spannende Diskussionen. Persönliche Präferenzen und mathematische Begründungen müssen in den Entscheidungsprozess integriert werden. Risikoaversionen oder Risikoaffinität bieten viel Diskussionsspielraum und die Tatsache, dass es bei Entscheidungsproblemen nicht immer *die richtige* Lösung gibt, zeigt den Schülerinnen und Schülern indirekt wie realitätsnah die Stochastik ist. Im echten Leben gibt es meistens verschiedene Wege, die zum Ziel führen; jeder dieser Wege ist an Risiken und Chancen gekoppelt.

Im Mathematikunterricht wird Schülerinnen und Schülern oftmals suggeriert, die Mathematik lasse nur einen Lösungsweg zu, der zum einzigen richtigen Ergebnis führt. In der Stochastik ist es durchaus möglich, dass sich voneinander abweichende Vorgehensweisen beim Problemlösen als legitim herausstellen. Dies trifft insbesondere auf Entscheidungsprobleme zu, in welchen verschiedene Optionen unterschiedliche Konsequenzen beinhalten. Werden beispielsweise beim stochastischen Problemlösen Situationen modelliert, in welchen es um einen möglichen Ressourcenverlust (Geld, Zeit, Gesundheit) geht, so muss immer auch die Ausgangssituation betrachtet werden („Wie viel Geld/Zeit habe ich zur Verfügung?“).

Welche konkreten mathematischen Inhalte spielen nun für die Modellierung von Risiko eine Rolle? Aufgrund bisheriger Arbeiten zum Thema haben sich vier Bereiche herauskristallisiert, die sich für die schulische Auseinandersetzung mit Risikosituationen als besonders relevant gezeigt haben (Latten u. a., 2011). Zu diesen gehören folgende Bereiche.

- Proportionen: Quantitative Beschreibung von einfachen Wahrscheinlichkeiten durch Verhältnisse
- Erwartungswert: Abwägen verschiedener Handlungsoptionen bei Entscheidungsproblemen
- Risikoerhöhung und Risikoreduktion: Risiken verändern sich durch neue Bedingungen
- Bedingte Proportionen/Wahrscheinlichkeiten: Wahrscheinlichkeiten verändern sich durch neue Information

Proportionen

Risiken werden in Form von Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt. Wahrscheinlichkeiten wiederum werden als Verhältnis zwischen den günstigen und den möglichen Ereignissen eines zufälligen Vorgangs ausgedrückt (Barzel & Kleine, 2013). Aus diesem Grund ist das *Denken in Verhältnissen* oder das *proportionale Denken* Kernkompetenz für einen adäquaten Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und somit auch für Risiken. Die Schwierigkeit beim Umgang mit Verhältnissen liegt in der erforderlichen simultanen Betrachtung zweier Größen oder Entitäten (Koerber, 2003). Man stelle sich nun vor, auf Strecke A passieren an *10 von 20* Tagen Unfälle und auf Strecke B an *11 von 40* Tagen. Wenn man sich nun die Frage stellt, auf welcher Strecke das Risiko für einen Unfall höher sei, so reicht es nicht aus, sich nur auf jeweils eine Größe der beiden Verhältnisse zu stützen. In diesem Fall wäre Strecke B „gefährlicher“, da sich dort ein Unfall mehr ereignet hat.

Doch diese Argumentation anhand der Betrachtung der absoluten Häufigkeit an Unfällen auf den beiden Strecken ist angreifbar. Es macht mehr Sinn, einen relativen Vergleich mittels der relativen Häufigkeit anzustellen. Die Tatsache, dass bei der Einschätzung der Gefahrenlage alle Größen (Unfalltage, Gesamtheit der Tage) berücksichtigt werden müssen, scheint nachvollziehbar. Es gibt jedoch zahlreiche Befunde aus der kognitionspsychologischen Forschung, die zeigen, dass diese simultane Betrachtung beider Größen eines Verhältnisses oft misslingt oder gar vernachlässigt wird (Denes-Raj & Epstein, 1994; Garcia-Retamero u. a., 2010; Koerber, 2003; Reyna & Brainerd, 2008; Spiegelhalter u. a., 2011). Nicht nur Schülerinnen und Schüler, sondern auch Erwachsene haben demnach oftmals Probleme, Risiken richtig zu interpretieren, die in Form von Brüchen und Prozenten kommuniziert werden.

Der Förderung von Kompetenzen im Umgang mit Verhältnissen wird daher in der Unterrichtseinheit zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit besondere Bedeutung beigemessen. Der Ansatz, elementare Kompetenzen zum Proportionsbegriff bereits in der Grundschule anhand von enaktiven Materialien zu fördern, ist erfolgsversprechend (Artikel 2). Schülerinnen und Schülern wird durch natürliche Darstellungen die Möglichkeit gegeben, ohne Brüche und Prozente die Verhältnisse intuitiv zu erfassen. Der Ansatz basiert auf der visuellen Wahrnehmung von Verhältnissen mithilfe von Steckwürfeln und Piktogrammen (Boyer, Levine & Huttenlocher, 2008; Scholz & Waschescio, 1986). Einerseits verfügen Kinder bereits ab einem Alter von einem Jahr über intuitive Strategien und Heuristiken, die erste Anzeichen von proportionalem Denken vermuten lassen (Denison & Xu, 2013), andererseits hat sich der Zugang zu Verhältnissen über Häufigkeitsformate und der ikonischen Darstellung dieser in einigen psychologischen Studien als besonders geeignet erwiesen (Garcia-Retamero u. a., 2010; Martignon & Wassner, 2005; Wassner, 2004; Zhu & Gigerenzer, 2006).

Erwartungswert

Was hat der mathematische Erwartungswert mit Risiko zu tun? Der Erwartungswert einer reellen diskreten Zufallsvariablen errechnet sich aus der Summe der Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten jedes möglichen Ergebnisses des Experiments und den „Werten“ dieser Ergebnisse (Wikipedia-Autoren, 2014a). Das „Risiko“ ist ein spezieller Erwartungswert, welcher sich aus dem Produkt aus „Eintrittswahrscheinlichkeit eines unerwünschten Ereignisses und Schadensschwere als Konsequenz aus dem Ereignis“ ergibt (Wikipedia-Autoren, 2014b). Risiko ist somit ein auf den Ressourcenverlust bezogener Erwartungswert (Schiller & Kuntze, 2012).

Eine vereinfachte mathematische Schreibweise:

$$E(X) = \sum_{1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + ... + x_n \times p_n \tag{3.1}$$

Abbildung 3.3: Erwartungswert einer reellen diskreten Zufallsvariablen

Entsprechend würde man das Gesamtrisiko wie folgt errechnen:

$$Risiko = \sum_{1}^{n} Schaden/Nutzen_i \times Eintrittswahrscheinlichkeit_i \tag{3.2}$$

Abbildung 3.4: Risiko auf Basis der Errechnung eines Erwartungswerts

Das Gesamtrisiko ergibt sich somit durch die Aufsummierung von n Produkten. In jedem dieser n Produkte wird ein möglicher Schaden oder Gewinn mit der dazugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeit multipliziert. Je nachdem welche Definition für Risiko betrachtet wird, können auch hier „Gewinne“ eintreten. In diesem Fall beinhaltet Risiko auch die Möglichkeit positiver Auswirkungen, manchmal auch als „Chance“ bezeichnet (Gigerenzer, 2013). In vielen schwierigen Entscheidungssituationen geht es darum, aus vielen verschiedenen Handlungsoptionen diejenige zu wählen, die für unsere Ziele und Absichten die „günstigste“ ist. Jede dieser Optionen beinhaltet gewisse Chancen und Risiken, die wiederum unterschiedliche Konsequenzen haben. Es kommt zum sogenannten *trade-off*, in dem Kosten und Nutzen abgewogen werden müssen. Greifen wir das Eingangsbeispiel des Ebolarisikos auf. Muss beispielsweise ein Arzt entscheiden, ob er Freiwilligenhilfe in den betroffenen Krisengebieten leistet, wird der Arzt damit verbundene Chancen und Risiken abwägen. Positive Auswirkungen seines Tuns (anderen Menschen helfen) stehen möglichen Risiken (eigene Ansteckungsgefahr) und Bedenken (Sorgen der Angehörigen) gegenüber.

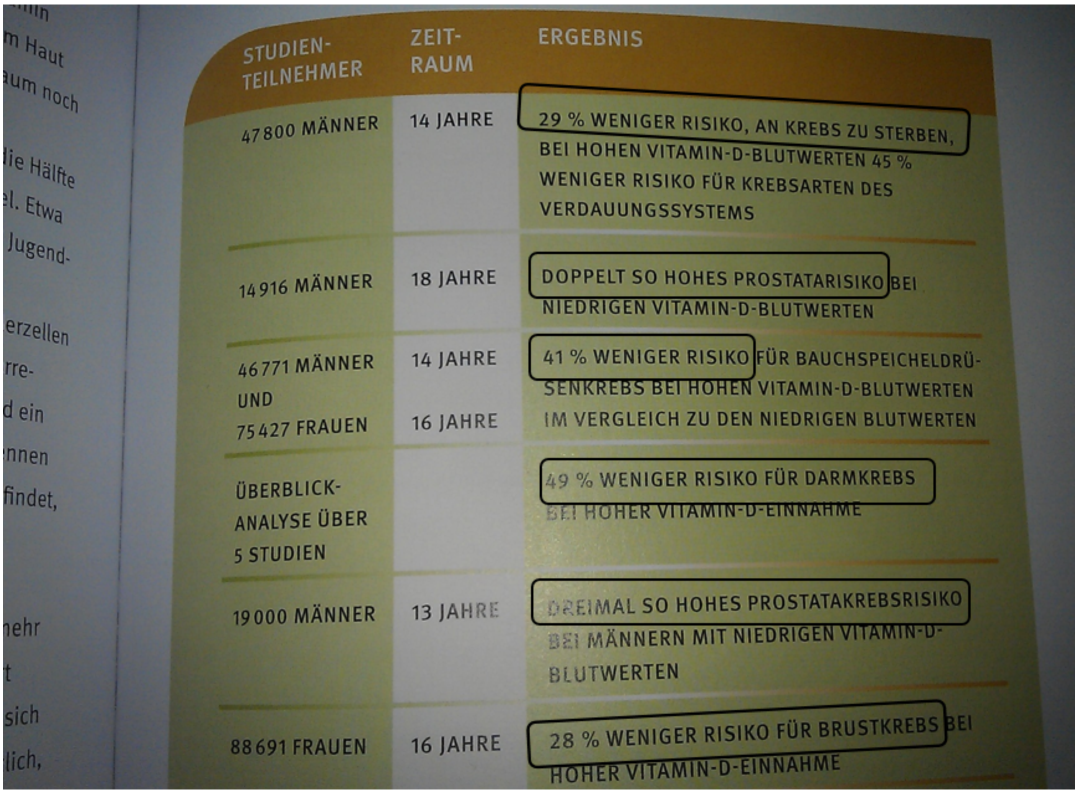
In der Unterrichtseinheit zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit sollen Grundschülerinnen und Grundschüler erste Kompetenzen im Umgang mit diesen trade-offs (manchmal auch risk-benefit-trade-off) erwerben. Dabei geht es um die Diskussion von Fragen wie: „Welche Optionen gibt es?“ „Wie sehen die möglichen Gewinne und Verluste aus?“ „Gibt es *die* beste Option?“. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, dass viele Ereignisse im Leben nicht vorhersehbar sind und die Welt nicht nach deterministischen Prinzipien aufgebaut ist. Gleichzeitig sollen sie erkennen, dass sich einige Situationen mithilfe mathematischer Werkzeuge modellieren lassen. In der Unterrichtseinheit wurden zwei mögliche Optionen gegenübergestellt, deren Sinnhaftigkeit die Schülerinnen und Schüler dann mithilfe eines Zufallsexperiments ergründen sollten. Eine Option war mit einem sicheren niedrigen Gewinn und die andere mit einem unsicheren aber hohen Gewinn verbunden (siehe Artikel 1). Dies bietet auch Anlass mit Kindern über Risikobereitschaft und Risikoscheue zu sprechen.

Risikoerhöhung und Risikoreduktion

Sowohl die Eintrittswahrscheinlichkeit eines unerwünschten Ereignisses als auch die Schadensschwere werden durch eine Vielzahl an Faktoren beeinflusst. Das Tragen eines Sicherheitsgurtes im Auto verringert die Schadensschwere bei einem Unfall, die Wahrscheinlichkeit für einen Unfall wird jedoch nicht verändert. Die Wahrscheinlichkeit, sich mit einem bestimmten Virus anzustecken, wird dagegen durch bestimmte Verhaltensweisen erhöht oder verringert. Verminderungen und Erhöhungen von Risiken werden oft in Form relativer Risiken beschrieben. So wird z. B. für ein Medikament durch die Angabe eines „20 % geringeren Risikos an XYZ zu erkranken“ geworben oder niedrige Vitamin-D Blutwerte erhöhen das Prostatakrebsrisiko „um das Doppelte“ (Abbildung 3.5).

Man unterscheidet zwischen einer relativen und einer absoluten Risikoreduktion (Risikoerhöhung). Beides sind Maßzahlen, um die Stärke des Effektes von Interventionen zu quantifizieren. Das folgende anschauliche Beispiel von Gigerenzer und Krämer (2014) soll den Unterschied zwischen absoluter und relativer Risikoerhöhung verdeutlichen. Das Beispiel dient eigentlich der Veranschaulichung des Problems der hohen Variabilität in kleinen Stichproben und den damit verbundenen problematischen Schlussfolgerungen. Es zeigt aber auch, wie unspektakuläre Studienresultate durch eine geschickte Darstellung von Information zu spektakulären Schlagzeilen verändert werden können.

> Drei von zehn Bundesbürgern sterben derzeit an Krebs. Greift man beliebig zehn Bundesbürger heraus, sterben aber nur selten genau drei davon an Krebs. Die tatsächliche Zahl der Krebsfälle schwankt dabei zwischen null und zehn. Wenn man wissen möchte, ob das Essen von Bonbons die Krebssterblichkeit erhöht, aber nur zehn Bürger untersucht, die keine Bonbons essen, dann kann es leicht sein, dass von diesen zehn nur zwei an Krebs sterben. Daraus kann



STUDIEN-TEILNEHMER	ZEIT-RAUM	ERGEBNIS
47800 MÄNNER	14 JAHRE	29 % WENIGER RISIKO, AN KREBS ZU STERBEN, BEI HOHEN VITAMIN-D-BLUTWERTEN 45 % WENIGER RISIKO FÜR KREBSARTEN DES VERDAUUNGSSYSTEMS
14916 MÄNNER	18 JAHRE	DOPPELT SO HOHES PROSTATARISIKO BEI NIEDRIGEN VITAMIN-D-BLUTWERTEN
46771 MÄNNER UND 75427 FRAUEN	14 JAHRE 16 JAHRE	41 % WENIGER RISIKO FÜR BAUCHSPEICHELDRÜSENKREBS BEI HOHEN VITAMIN-D-BLUTWERTEN IM VERGLEICH ZU DEN NIEDRIGEN BLUTWERTEN
ÜBERBLICK-ANALYSE ÜBER 5 STUDIEN		49 % WENIGER RISIKO FÜR DARMKREBS BEI HOHER VITAMIN-D-EINNAHME
19000 MÄNNER	13 JAHRE	DREIMAL SO HOHES PROSTATAKREBSRISIKO BEI MÄNNERN MIT NIEDRIGEN VITAMIN-D-BLUTWERTEN
88691 FRAUEN	16 JAHRE	28 % WENIGER RISIKO FÜR BRUSTKREBS BEI HOHER VITAMIN-D-EINNAHME

Abbildung 3.5: Studienresultate in Form relativer Risiken

> man aber nicht schließen, dass Bonbons die Sterblichkeit um 50 Prozent (von zwei auf drei) erhöhen. (Gigerenzer & Krämer, 2014)

Die Erhöhung *um 50 Prozent* entspricht der relativen Risikoerhöhung. Sie errechnet sich aus dem Verhältnis der Risiken in beiden Gruppen. *3* erkrankte Personen in der Gruppe der Bonbonesser sind 50 Prozent mehr als *2* erkrankte Personen in der Gruppe der Nichtbonbonesser. Relative Risiken eignen sich nicht um Schaden und Nutzen verschiedener medizinischer Interventionen darzustellen, da Information über Basisraten nicht mitgeliefert werden, die für das Verstehen der Information von höchster Relevanz sind. Die Basisrate verrät etwas über die Häufigkeit des Vorkommens eines Merkmals in der Grundgesamtheit. Wird dies verschwiegen, so kann beispielsweise der Nutzen von Arzneimitteln leicht überschätzt werden (Koch, 2005). Die Erhöhung um 10 Prozentpunkte im obigen Beispiel (20 Prozent $\rightarrow$ 30 Prozent) entspricht der absoluten Risikoerhöhung. Diese Art der Risikokommunikation ist transparenter, leichter zu interpretieren und sollte daher Angaben in Form relativer Risiken ersetzen (Gaissmaier & Gigerenzer, 2008).

In der Unterrichtseinheit zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit spielen die Begrifflichkeiten des absoluten und relativen Risikos indirekt eine Rolle. Kinder am Ende ihrer Grundschulzeit verfügen weder über das Begriffswissen zu Prozenten, noch sollte der Fokus auf der Klärung von Begriffen liegen. Es geht vielmehr um die Einsicht, dass bestimmte Situationen mithilfe von Verhältnissen beschrieben werden können und dass sich diese Verhältnisse durch neue Rahmenbedingungen verändern können: „*4 von 20* Kinder aus Klasse 4 c haben sich beim Sporttag verletzt. Für den nächsten Sporttag sollen die Kinder Verhaltensregeln erarbeiten, damit sich die Verletzungsgefahr verringert. Die Lehrkraft geht davon aus, dass sich die Gefahr durch die neuen Umgangsregeln halbieren lässt.“ Haben Kinder die Problemsituation verstanden, so kommen sie schnell darauf, dass sich beim nächsten Sporttag eventuell tatsächlich nur noch *2 von 20* Kinder verletzen. Zwei Punkte helfen den Kindern dabei auf die Lösung zu kommen. Einerseits „verringert“ sich die Gefahr; es sollten sich daher weniger Kinder verletztten. Andererseits wird von „einer Halbierung“ gesprochen. Durch die Diskussion derartiger Problemsituationen und die Darstellung der Verhältnisse mithilfe bunter Steckwürfel werden die Schülerinnen und Schüler für Risikoerhöhungen und Risikoverminderungen sensibilisiert. Im Stochastikunterricht der Sekundarstufe können absolute und relative Risiken dann berechnet und die Nützlichkeit dieser Maße diskutiert werden (Abbildung 3.5 in Strunz (2012)).

Bedingte Proportionen/Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden in Deutschland typischerweise erst im Stochastikunterricht der Sekundarstufe ab Klasse 9 oder 10 oder sogar später behandelt. In den Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss werden bedingte Wahrscheinlichkeiten nicht explizit aufgeführt (KMK, 2003). Lediglich in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife werden diese explizit erwähnt (KMK, 2012). Anhand bedingter Wahrscheinlichkeiten (BW) können viele anwendungsorientierte Beispiele erarbeitet werden wie etwa die Einschätzung der Zuverlässigkeit medizinischer Tests oder DNA-Analysen (Krauss & Hertwig, 2000; Hauer-Typpelt, 2007). Risiken falsch-positiver Testresultate in der medizinischen Diagnostik oder der Ermittlung in Mordprozessen können mithilfe bayesianischem Schlussfolgern oder Schließen (BS) beschrieben werden (Gigerenzer, 2013). Diese Themen sind nicht nur spannend und inhaltlich von höchster Relevanz, sie sorgen auch für viel Diskussionsstoff, wenn sie im Unterricht besprochen werden (Wassner, 2004). Gerade im Bereich der Zuverlässigkeit medizinischer Tests driften intuitive Einschätzung der Sachsituation und formal berechnete Lösung weit auseinander (Hauer-Typpelt, 2007). So können auch viele Ärzte nicht nachvollziehen, warum die Wahrscheinlichkeit, dass eine Krankheit bei positivem Test wirklich vorliegt, teilweise nur bei 10 % liegt, während die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test bei vorliegender Krankheit 90 % ist (Gigerenzer & Gray, 2011).

Das zu stark auf Formalismen und Regeln gerichtete Unterrichten bedingter Wahrscheinlichkeiten und des Satzes von Bayes geht mit einigen Problemen vieler Schülerinnen und Schülern einher (Diaz & Fuente, 2007). Geeignete Repräsentationen in Form natürlicher Häufigkeiten und ikonischer Darstellungen (Abbildung 3.6) können helfen, ein Grundverständnis für bedingte Wahrscheinlichkeiten aufzubauen, um so die Struktur des Problems zu erfassen (Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Micallef, Dragicevic & Fekete, 2012). Von diesen natürlichen Darstellungsformaten konnten nicht nur Ärzte (Gigerenzer & Gray, 2011; Gigerenzer, Gaissmaier, Kurz-Milcke, Schwartz & Woloshin, 2008), sondern ebenso Sekundar- (Wassner, 2004; Sedlmeier & Gigerenzer, 2001) und Primarstufenschü-

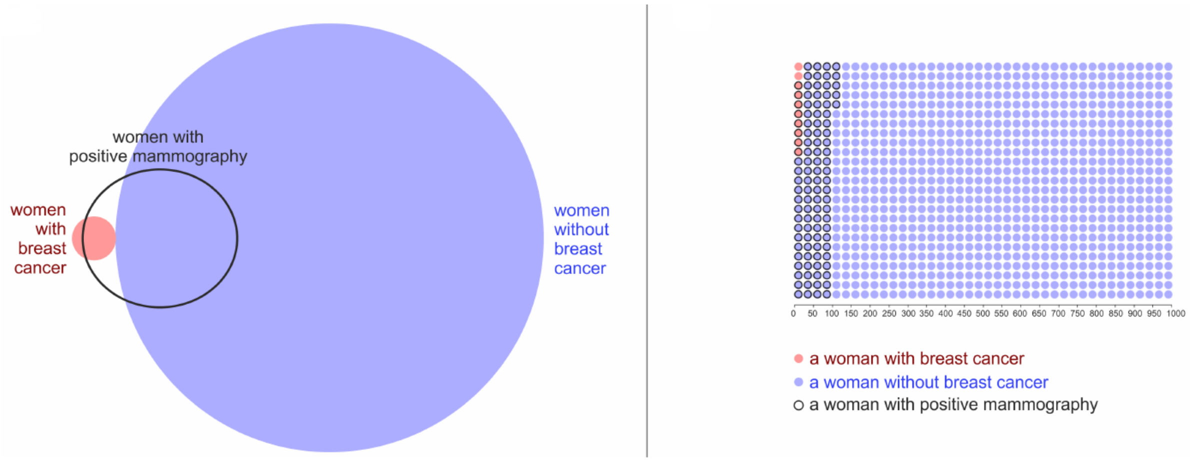


Abbildung 3.6: Populationsdiagramm zur Darstellung falsch-positiver und falsch-negativer Testresultate

lerinnen und -schüler profitieren (Zhu & Gigerenzer, 2006). Martignon und Kurz-Milcke (2006b) konnten zeigen, dass natürliche Darstellungsformate in Kombination mit bunten Steckwürfeln in der Grundschule zur Förderung erster Kompetenzen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden können.

4 Studie zu Fördermöglichkeiten von Risk Literacy in der Grundschule

In der Zeit zwischen Dezember 2012 und Juli 2013 wurde eine Studie zur Förderung elementarer mathematischer und stochastischer Konzepte zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit durchgeführt. Die durchgeführte Lerneinheit basiert auf der mathematischen Modellierung von Entscheidungssituationen durch enaktive Materialien und bildlichen Darstellungen von Verhältnissen in Form von Piktogrammen. Die Idee der Studie war es, vorhandene Primärintuitionen zu Risiko durch eine geeignete Lernumgebung gezielt zu fördern und den Wissenszuwachs empirisch zu evaluieren. Im Sinne des Spiralcurriculums (Bruner, 1970) sollen die durch eine Intervention gestärkten heuristischen Modelle dann in der Sekundarstufe durch systematische Lehr- und Lernprozesse zu sogenannten sekundären Intuitionen und schließlich zu ausgereiftem Begriffswissen ausgebaut werden. Die frühzeitige spielerische Durchdringung stochastischer Konzepte könnte dazu führen, dass die gleichen formalen Inhalte in der Sekundarstufe nicht mehr als abstrakt erlebt werden.

Der Großteil bisherige Studien zur Entwicklung stochastischen Denkens bei Kindern im Allgemeinen sowie Arbeiten zum Thema Risk Literacy in der Grundschule im Speziellen wurden in Form von explorativen Unterrichtsexperimenten oder querschnittlichen Designs durchgeführt (Bryant & Nunes, 2012). Die Ergebnisse dieser Studien sind erfreulich, da gezeigt werden konnte, dass Kinder intuitives Wissen in Form von zielführenden Heuristiken in Situationen unter Unsicherheit besitzen (Kurz-Milcke & Martignon, 2007; Martignon & Kurz-Milcke, 2006b; Martignon & Krauss, 2009; Kuntze, Gundlach, Engel & Martignon, 2010). Die vorliegende Arbeit soll mit einem längsschnittlichen Deisgn zum einen weitere Evidenzen zum Vorhandensein dieser Intuitionen sammeln, zum anderen sollen durch den Vergleich von Experimental- und Kontrollklassen Antworten auf die Frage gefunden werden, ob sich elementare Kompetenzen zu Risiko bereits in der Grundschule erfolgreich und nachhaltig fördern lassen. Darüber hinaus soll die Studie ermöglichen, Aussagen über die Entwicklung von Begriffswissen (Proportionen, Erwartungswert, bedingte Wahrscheinlichkeit) durch bestimmte Maßnahmen und damit verbundenen konzeptuellen Veränderungen treffen zu können. Durch die zusätzliche Erhebung verschiedener Kovariaten können Einflussfaktoren auf die Kompetenzentwicklungen herausgearbeitet werden. Ergänzend zur Interventionsstudie wurde eine Befragung von zukünftigen Grundschullehrkräften durchgeführt. Ziel war es, von den positiven Resultaten der Studie zu berichten und dadurch zukünftige Lehrkräfte zu motivieren, die vorgestellten Unterrichtsideen in die eigene Unterrichtspraxis zu implementieren. Gleichzeit sollten Vorurteile und Vorbehalte gegenüber dem Lehren und Lernen von Stochastik in der Grundschule abgebaut werden.

4.1 Forschungsfragen

Für die vorliegende Arbeit waren folgende Fragen leitend:

- Sind bei Schülerinnen und Schülern in Klasse 4 Primärintuitionen zu verschiedenen stochastischen und mathematischen Konzepten vorhanden, mit denen Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit modelliert werden können? (1. Artikel)

- Lassen sich diese Konzepte bereits durch eine kurze Intervention anhand geeigneter Darstellungsformate in der Primarstufe fördern? (1. Artikel)

Neben diesen zentralen Leitfragen sollten durch die Studie Antworten auf folgende Fragen gefunden werden:

- Welchen Einfluss hat das Vorwissen (Primärintuitionen) auf die erzielte Leistung der Schülerinnen und Schüler im Nachtest? (1. Artikel)
- Welchen Einfluss hat das Vorwissen (Primärintuitionen) auf die erzielte Leistung der Schülerinnen und Schüler im Follow-up Test? (1. Artikel)
- Welchen Effekt hat die Intervention auf das proportionale Denken? (2. Artikel)
- Welche typischen Fehlvorstellungen besitzen Kinder bezüglich des Proportionsbegriffs? (2. Artikel)
- Bewirkt eine kurze Intervention einen Konzeptwechsel beim Umgang mit Proportionen? (2. Artikel)
- Sind die eingesetzten Darstellungsformate für die Grundschulstochastik geeignet? (3. Artikel)
- Welchen Effekt hat die Intervention auf das konzeptuelle Verständnis für bedingte Wahrscheinlichkeiten (BW) und bayesianischem Schließen (BS)? (3. Artikel)
- Wie stehen zukünftige Mathematiklehrkräfte dem vorgeschlagenen Ansatz gegenüber? (3. Artikel)

Die Antworten auf diese Forschungsfragen gehen aus den Ergebnissen der drei Artikel hervor. Sie werden in *Kapitel 6 Diskussion und Fazit* noch einmal herausgegriffen und diskutiert.

4.2 Design

An der Studie nahmen insgesamt 244 Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen 8 und 12 Jahren aus sechs Grundschulen im Umkreis von Ludwigsburg teil. Die 12 Grundschulklassen wurden in Versuchs- und Kontrollklassen aufgeteilt; 8 Klassen waren Teil der Interventionsgruppe, 4 Klassen dienten als Kontrollklassen. Vor der Intervention wurde das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler durch einen 30-minütigen Test abgefragt. Nach der Unterrichtseinheit schloss ein Nachtest an, in welchem die gelernten Konzepte abgefragt wurden. Der Vergleich von Vor- und Nachtestergebnissen soll letztendlich Aussagen über den Wissenszuwachs ermöglichen. Mögliche Langzeiteffekte der Intervention wurden anhand eines Follow-up Tests nach drei Monaten festgestellt.

4.3 Instrumente

Als Testinstrument wurde ein Wissenstest mit geschlossenen und offenen Aufgabenformaten zu folgenden Themengebieten eingesetzt: Proportions- und Wahrscheinlichkeitsvergleiche, bedingte Proportionen/Wahrscheinlichkeit, Risikoreduktion und schwierige Entscheidungen als Vorstufe zum mathematischen Erwartungswert. Der Test enthält Items und Ideen aus dem Testinstrument, welches für das Projekt RIKO-STAT eingesetzt wurde (Kuntze u. a., 2010; Latten u. a., 2011). Diese wurden leicht verändert und durch weitere Aufgaben ergänzt. Die Inhalte und Aufgabenformate von Nachtest und Follow-up Test sind denen des Vortests nachempfunden. Die Items unterscheiden sich lediglich durch die Zahlen und Aufgabengeschichten. Dadurch wurde einerseits ein Lerneffekt verhindert, der sich allein aufgrund der Bearbeitung eines Tests ergibt, andererseits wurde durch die Strukturgleichheit der Tests eine Vergleichbarkeit gewährleistet. Die Punkteverteilung des Tests leitet sich aus der Schwerpunktsetzung der geförderten Bereiche innerhalb der Unterrichtseinheit ab. Der Proportionsbegriff als Fundament für Wahrscheinlichkeiten nahm der größten Raum ein, danach absteigend die bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert und schließlich die Risikoreduktion. Diese Bereiche lassen sich jedoch nicht scharf voneinander trennen. In jedem Bereich sind Elemente der anderen enthalten. Dies gilt vor allem für den Proportionsbegriff: Proportionales Denken ist eine Kernkompetenz, die in allen Aufgaben des Tests eine Rolle spielt.

- Proportionen
  - Erweitern eines vorgegebenen Verhältnisses
  - Vergleich einfacher Verhältnisse
  - Vergleich zweier relativer Häufigkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeit (BW) und bayesianisches Schließen (BS)
  - Lückentext BW und BS
  - Offene Aufgabe BS
- Erwartungswert
  - Offene Aufgabe Entscheidungsproblem
  - Lückentext Entscheidungsproblem
- Risikoreduktion
  - Vermindern eines Verhältnisses
- Sonstige
  - Prognosen bei einfachen Zufallsexperimenten
  - Prognosen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

4.4 Intervention

Ziel der Lerneinheit war die Vermittlung elementarer Kompetenzen und Konzepte zur mathematischen Modellierung von Risikosituationen. Im folgenden Abschnitt wird aufgezeigt, auf welche Art und Weise diese Inhaltsbereiche mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet wurden.

Anhand von einfachen und mehrstufigen Zufallsexperimenten sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst lernen, Wahrscheinlichkeiten einzuschätzen und zu vergleichen und dabei die eigenen aufgestellten Vermutungen über die Ausgänge der Experimente zu reflektieren. Die Zufallsexperimente wurden anfangs im Klassenverband besprochen und durchgeführt. Eine undurchsichtige Urne diente als Zufallsgenerator. In diese wurden Steckwürfel gelegt und nach Schütteln der Urne blind gezogen. Die Ergebnisse dieser „mehrmaligen Ziehung mit Zurücklegen“ wurden dann an der Tafel festgehalten. Es wurden fast ausschließlich 10-stufige Zufallsexperimente durchgeführt, der Urneninhalt wurde variiert. Die Festlegung auf 10-stufige Zufallsexperimente hatte den Hintergrund, dass Relationen zwischen Urneninhalt und Ergebnissen nach 10-maligem Ziehen für die Schülerinnen und Schüler ersichtlich wurden. Unwahrscheinliche Ereignisse überraschten die Kinder, doch der Zufall war für die Kinder auf längere Sicht dann doch „berechenbar“. Um dies mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren, wurde ein Steckwürfeltürmchen, bestehend aus 2 gelben und 8 roten Würfeln, in seine Bestandteile zerlegt und in die Urne gelegt. Intuitiv sagten die Kinder das wahrscheinlichste Ergebnis nach zehn Ziehungen voraus: die Ziehung zweier gelber und acht roter Würfel. Die mehrmalige Durchführung dieses Experiments führte zur Einsicht, dass auch ähnliche Ergebnisse mit ähnlicher Wahrscheinlichkeit auftreten können (3 gelbe und 7 rote); bestimmte Ergebnisse (8 gelbe und 2 rote) waren für die Kinder zwar möglich, aber unwahrscheinlich. Als nächstes wurden jeweils einfache Verhältnisse zweier Steckwürfeltürmchen miteinander verglichen (2 gelb - 5 rot mit 2 gelb - 8 rot). Anschließend wurde anhand des Zufallsexperiments empirisch überprüft, ob kleinere/größere Verhältnisse auch mit kleineren/größeren Wahrscheinlichkeiten verbunden sind. Als letztes wurde aus einer Urne mit unbekanntem Inhalt gezogen und die Klasse musste sich nach 10-maligem Ziehen für einen möglichen Urneninhalt entscheiden.

In der zweiten Unterrichtsstunde wurden die Schülerinnen mit einer „schwierigen Entscheidung“ konfrontiert. Es ging um das Abwägen zweier Handlungsoptionen. Die „riskante“ Option war gekoppelt an einen unsicheren, dafür hohen Gewinn in Form von vier Schokoladenriegeln. Die sichere Option war gekoppelt an einen sicheren aber niedrigen Gewinn in Form von einem Schokoladenriegel. Den hohen Gewinn würde man durch die Ziehung eines gelben Steckwürfels aus einer Urne erzielen. Bei der Ziehung eines roten Würfels würde man hingegen nichts gewinnen. Im Klassenverband wurden die Vor- und Nachteile der beiden Optionen diskutiert. Dabei kamen auch persönliche Einstellungen zu Risiko zur Sprache. Bevor die Entscheidungssituation simuliert wurde, äußerten die Schülerinnen und Schüler Gedanken, die auf eine große Risikoscheue oder einem Sicherheitsbedürfnis schließen ließen. Die Mehrheit der Klasse würde sich demnach für die sichere Option entscheiden. „Lieber einen Riegel sicher als am Ende mit leeren Händen da zu stehen. Ich habe meistens sowieso kein Glück, deswegen würde ich mich für die sichere Variante entscheiden“. Ähnlich wie zu Beginn der Schulstunde sollten die Schülerinnen und Schüler nun die Vor- und Nachteile der beiden neuen Optionen *10 Schokoriegel sicher* und *10 x das Experiment durchführen* diskutieren. Die Präferenz lag auch hier auf der sicheren Option. Die Schülerinnen und Schüler simulierten die Entscheidungssituation, indem sie das Ergebnis der sicheren Option mit dem Ergebnis aus der 10-maligen Durchführung des Experiments verglichen. Dafür protokollierten die Kinder ihre Ziehungen anhand einer Strichliste und erkannten, dass die riskante Option mit einer höhere „Ausbeute an Schokoladenriegeln“ verknüpft ist. Durch die Ziehung dreier oder mehrerer gelber Steckwürfel wäre die riskante Option der sicheren Option überlegen. Lediglich bei einer (recht unwahrscheinlichen) Ziehung von zwei oder weniger gelben Steckwürfel wäre die sichere Option die bessere Wahl. Am Ende der Stunde äußerten die Schülerinnen und Schüler eine größere Risikoaffinität.

In der dritten Unterrichtsstunde ging es um das Vergleichen und Erweitern von Verhältnissen sowie um den Begriff der Risikoreduktion. Hierfür wurden zu Beginn der Unterrichtsstunde im Klassenverband Kurzgeschichten diskutiert, in welchen verschiedene Risiken und Gefahren miteinander verglichen werden sollten. Dabei wurden Kontexte aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler gewählt. Steckwürfel dienten der Veranschaulichung der Risiken, die in Form von Verhältnissen jeweils gegenübergestellt und verglichen wurden. „Kai hat nach einer Trainingssaison noch *2 von 5* Frisbees, der Rest ging beim Training verloren. Sophie hat noch *2 von 6* Frisbees. Wer passt besser auf seine Frisbees auf?“. Der Schwierigkeitsgrad wurde durch größere Zahlen und ähnliche Verhältnisse sukzessive gesteigert. Durch das Klassengespräch entwickelten die Schülerinnen und Schüler erste Strategien für das Erweitern von Verhältnissen. Durch die enaktive Repräsentation einfacher Verhältnisse wie etwa *1 von 3* (Sonnenbrillen) wurde schnell klar, wie viele Sonnenbrillen von insgesamt *6* kaputt gehen würden. Um diese Erweiterung des Verhältnisses zu unterstreichen, wurden lediglich zwei kleine Türmchen bestehend aus einem roten (kaputt) und zwei gelben (nicht kaputt) Steckwürfeln zusammengesteckt. Die Geschichten vom Anfang der Stunde wurden nun erneut aufgegriffen und erweitert, indem die Risiken und Gefahren halbiert werden sollten. „Kai will für die neue Trainingssaison besser auf seine Frisbees aufpassen. Ein Freund sagt ihm, er könnte womöglich sein ‚Risiko‘ halbieren. Was könnte der Freund damit meinen?“. Für die Mehrheit der Kinder war schnell klar, dass bei diesem Beispiel das Risiko von *2 von 5* auf *1 von 5* reduziert wird. Die Schülerinnen und Schüler hatten am Ende der Schulstunde Zeit auf einem Arbeitsblatt, einfache Verhältnisse – zur Veranschaulichung dargestellt als Piktogramme – zu erweitern und sich eine Geschichte für eine Risikoreduktion auszudenken. Diese Geschichten wurden schließlich von den Kindern vorgetragen.

In der vierten Unterrichtsstunde wurde eine bayesianische Aufgabe besprochen. Anhand dieser sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst einfache Kategorisierungen vornehmen und durch natürliche Häufigkeiten Aussagen über die Verteilung von Merkmalen treffen. „*2 von insgesamt 10* Kindern sind Mädchen.“ „*3 von 10* Kindern haben lange Haare, *7 von 10* Kindern haben kurze Haare“. Steckwürfel dienten als enaktive Repräsentation der Merkmalsträger (Mädchen und Jungen) und der Merkmale (lange und kurze Haare). Ein langhaariger Junge wurde durch Zusammenstecken eines blauen (Junge) und gelben (lange Haare) Steckwürfels dargestellt. Die Klasse versammelte sich um das Pult und es wurden verschiedene Fragen diskutiert, die sich auf Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten bestimmter Merkmalsträger oder Merkmale bezogen. „Du siehst eine Person aus der Ferne. Ist es eher ein Junge oder eher ein Mädchen? Dir sagt jemand, er habe mit einem Kind mit kurzen Haaren aus dieser Gruppe gesprochen. Handelte es sich eher um einen Jungen oder um ein Mädchen?“ Die Kinder erarbeiteten sich die Lösungen, indem sie die Steckwürfeltürmchen auf dem Pult bewegten. Die Ausgangssituation der Aufgabe wurde variiert, indem die Schülerinnen und Schüler die Zusammensetzung der Kinder in der Gruppe und die Merkmalsverteilungen veränderten. Am Ende der Schulstunde wurde dieselbe Aufgabe durch die Aufstellung von Schülerinnen und Schüler an der Tafel nachgespielt. Die Wahrscheinlichkeit für „Junge“ unter der Bedingung „lange Haare“ (P(Junge | lange Haare)) wurde beispielsweise simuliert, indem im ersten Schritt alle Kinder mit langen Haaren ein paar Schritte nach vorn liefen. Im zweiten Schritt musste dann nur noch gezählt werden, wie viele von diesen übriggebliebenen Kindern Jungen sind.

4.5 Ergebnisse

Aufgrund der guten Vortestergebnisse kann durchaus von Primärintuitionen zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit gesprochen werden. Die Schülerinnen und Schüler erreichten vor der Unterrichtseinheit bereits die Hälfte der maximal zu erreichenden Punktezahl. Die allgemeine mathematische Kompetenz zeigte sich hier als zuverlässiger und signifikanter Prädiktor für das Vortestergebnis eines Kindes. Die Auswertung der Nachtestergebnisse zeigt eine signifikante Leistungssteigerung durch die Intervention. Die stärksten Prädiktoren für den Erfolg im Nachtest waren erneut die allgemeine mathematische Kompetenz und die Vortestleistung. Ein Zusammenhang zwischen Testleistung und dem Alter und das Geschlecht eines Kindes konnte nicht festgestellt werden. Schülerinnen und Schüler aus den Treatmentklassen erzielten im Vergleich zu Schülerinnen und Schülern aus Kontrollklassen auch drei Monate nach der Intervention eine signifikant höhere Testleistung. Die Effektstärke beträgt für den Vergleich von Vor- und Nachtestergebnissen der Treatmentgruppe η_p^2=.13, für den Vergleich von Vor- und Follow-up Testergebnissen der Treatmentgruppe η_p^2=.03.

4.6 Diskussion

Die Förderung verschiedener Kompetenzen und Konzepte zum Themenbereich „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit“ anhand geeigneter Repräsentationen kann als erfolgreich und nachhaltig bezeichnet werden. Vorliegende Befunde aus mathematikdidaktischer und kognitionspsychologischer Forschung zum intuitiven Begriffswissen zu Proportionen (Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein u. a., 1970a), zum Erwartungswert (Denison & Xu, 2013) und zum Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit (Zhu & Gigerenzer, 2006) konnten empirisch bestätigt werden. Es wurden keine Aussagen zur

Herkunft dieser stochastischen Intuitionen getroffen. Vermutlich speisen sich diese aus der Auseinandersetzung mit zufälligen Phänomenen im Alltag. Darüber hinaus könnten Kompetenzen in diesen Bereichen Resultat der Auseinandersetzung mit einfachen Zufallsexperimenten in den unteren Jahrgangsstufen der Primarstufe sein. Den (nachhaltigen) Erfolg der Intervention kann meines Erachtens auf die eingesetzten Repräsentationsformate zurückgeführt werden. Risiken, Verhältnisse, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wurden in allen Unterrichtsstunden durch Steckwürfel(-türmchen) dargestellt und in Form natürlicher Häufigkeiten kommuniziert. Durch die ikonische Darstellung konnte der Verhältnisbegriff visuell wahrgenommen werden (Scholz & Waschescio, 1986). Dieser Zugang über die drei Ebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch (Bruner, 1970)) eignet sich daher gut, elementare Kompetenzen und Konzepte zu Risiko zu fördern. Das intuitive Vorverständnis zu den geförderten Konzepten, gepaart mit dem statistisch abgesicherten Lerneffekt durch die Intervention und der festgestellten Akzeptanz dieses Ansatzes bei zukünftigen Lehrkräften, sollte Anlass geben, die bestehende Grundschulstochastik um ein spannendes und relevantes Themenfeld zu erweitern.

5 Artikel

Im folgenden Abschnitt werden die inhaltlichen Schwerpunkte der drei entstandenen Artikel erläutert. Zwei der drei Artikel wurden bei englischsprachigen, ein Artikel bei einem deutschsprachigen Journal eingereicht.

Im **1. Artikel** wird die durchgeführte Studie vorgestellt und von der Wirksamkeit der Intervention berichtet. Der Artikel mit dem Namen *Fostering Risk Literacy in Elementary School* wurde beim englischsprachigen Onlinejournal *International Electronic Journal of Mathematics Education* veröffentlicht. Im Fokus des Artikels steht die Frage nach der Wirksamkeit einer vierstündigen Unterrichtseinheit zu „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit“. Die Hypothese lautet, die Vermittlung stochastischer Inhalte anhand geeigneter Repräsentationen gelingt und führt zu einem Lernerfolg. Der Artikel stellt überblicksartig die wesentlichen Kompetenzen vor, die für die mathematische Modellierung von Risiko von Bedeutung sind. Dazu gehören: Vergleichen und Erweitern von Verhältnissen und Wahrscheinlichkeiten, Abwägen von Handlungsoptionen anhand von Zufallsexperimenten, die Auseinandersetzung mit sich veränderten Wahrscheinlichkeiten durch neue Information sowie Risikoreduktionen. Die Motivation der Studie geht aus der ausführlichen Einleitung des Artikels hervor. Hier beschreibe ich die menschlichen Unwegsamkeiten im Umgang mit Risiken und Unsicherheiten im Alltag. Einflussfaktoren auf das menschliche Entscheidungsverhalten werden dargestellt und aufbauend darauf wird die enorme Bedeutung von Datenkompetenz herausgearbeitet. Es wird aufgezeigt, dass das Verständnis für numerische Information stark vom Darstellungsformat abhängt, in der diese präsentiert werden. Es wird die Unterrichtseinheit vorgestellt und genau dargestellt, wie die zuvor in der Theorie vorgestellten Darstellungsformate im Unterricht eingesetzt werden können. Im Ergebnisteil wird die Wirksamkeit der Unterrichtseinheit statistisch belegt. Die Quintessenz lautet: Das frühe informelle Hantieren mit Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten anhand geeigneter Repräsentationsformate führt zum Erwerb von ersten Kompetenzen einer Risk Literacy.

Im **2. Artikel** liegt der Fokus auf einem Teil der Intervention, dem Vergleichen und Erweitern von Verhältnissen und Wahrscheinlichkeiten. Leitend für den Artikel war die Hypothese, dass proportionales Denken bereits in der Grundschule effektiv gefördert werden kann, sofern im Unterricht auf Repräsentationsformate zurückgegriffen wird, die für die Kinder intuitiv greifbar sind. Der Beitrag mit dem Titel *Warum ist 1 von 2 wahrscheinlicher als 2 von 9? Denken in Verhältnissen als Basiskompetenz für die Wahrscheinlichkeitsrechnung* wurde im deutschsprachigen Journal *Lernen und Lernstörungen* eingereicht. Der Artikel wird im Rahmen eines Sonderhefts voraussichtlich im April/Mai 2015 erscheinen. Die Begründung für diesen Fokus liegt in der übergeordneten Rolle von Proportionen und proportionalem Denken hinsichtlich des Umgangs mit Wahrscheinlichkeiten, insbesondere mit Risiken. Aufgrund recht robuster Fehlvorstellungen bezüglich des Verhältnisbegriffs kommt der frühen Förderung enorme Bedeutung zu. Es wird beschrieben, wie man anhand geeigneter enaktiver, ikonischer und symbolischer Darstellungsformate das Denken in Verhältnissen erfolgreich fördern kann. Steckwürfel, Piktogramme und natürliche Häufigkeiten sind gute Werkzeuge um erste informelle, heuristische, proportionale Strategien zu fördern. Neben des durchgeführten Unterrichts zum Verhältnisdenken werden typische Aufgaben zum Verhältnisvergleich vorgestellt. Schwerpunktmäßig werden damit zusammenhängende fehlerhafte und korrekte Strategien dargestellt und aufgezeigt, wie sich die Anzahl korrekter multiplikativer Strategien durch die Intervention erhöht. Zur statistischen Untermauerung dieser Ablösung fehlerhafter Strategien werden die Lösungen von Schülerinnen und Schülern zu drei Testzeitpunkten miteinander verglichen.

Im **3. Artikel** geht es insbesondere um schulische Förderansätze zu bedingten Wahrscheinlichkeiten und bayesianischem Schließen. Der Artikel mit dem Namen *Freuency formats: how primary school stochastics profits from cognitive psychology* soll beim englischsprachigen Fachjournal *Statistics Education Research Journal (SERJ)* eingereicht werden. Im Artikel wird aufgezeigt, wie ein erstes Grundverständnis für bedingte und bedingende Wahrscheinlichkeiten anhand geeigneter Darstellungsformate bereits in der Grundschule aufgebaut werden kann. Die Idee für die frühe Schulung dieser Konzepte leitet sich aus Befunden der kognitionspsychologischen Forschung ab. Anhand von intuitiven Häufigkeitsformaten überwinden Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe Verständnishürden beim Erlernen bedingter Wahrscheinlichkeiten und der bayesschen Regel (Wassner, 2004). Auch Grundschulkinder können typische bayesianische Aufgaben lösen, wenn die Informationen in geeigneten Formaten präsentiert werden (Zhu & Gigerenzer, 2006). Es wird ein intuitives didaktisches Konzept vorgestellt, wie man bereits in der Grundschule anhand von Steckwürfeln und bildlichen Darstellungen diese Kompetenzen fördern kann. Anhand einer kurzen Interventionsstudie mit Vor-, Nach- und Follow-up Testung konnten erste Lernerfolge durch dieses Konzept empirisch bestätigt werden.

Darüber hinaus wird von einer Studie mit Lehramtsstudierenden an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg berichtet. Die Idee für die Befragung zukünftiger Mathematiklehrkräfte war Folgende: Die Diskussion um eine Öffnung des bisherigen Stochastikunterrichts der Grundschule um Elemente zu bedingten Wahrscheinlichkeiten und bayesianischem Schließen kann nur angeregt werden, wenn die Sinnhaftigkeit des vorgestellten Ansatzes auch erkannt wird. Daher wurde den Lehramtsstudierenden die Arbeit sowie die zentralen Ergebnisse der Interventionsstudie vorgestellt. Anschließend sollten diese Stellung dazu nehmen, indem sie Argumente für oder gegen die frühe Förderung stochastischer Inhalte aufzählten.

5.1 Artikel 1

Fostering Risk Literacy in Elementary School

Christoph Till

PH Ludwigsburg University of Education

Abstract
Research shows that adults often have problems in estimating chances and risks in medical, environmental or economic contents. Clear communication of risk in public is often biased by an ambiguous language or misleading representations of information, or people's emotions and feelings (Gigerenzer, 2013; Spiegelhalter et al., 2011). This correlates with people's problems in understanding statistical and numerical information. Consequently one of the main aims of educators should be to become aware of this "Risk Illiteracy" and to improve young learners' understanding of different aspects of risk. From the perspective of stochastics education, this means to focus on an early encounter with probabilistic issues in real-life situations of risk. Ongoing studies discovered that mathematical concepts like proportions, expected values and conditional probabilities can be taught to children through "Natural Frequencies" in hands-on activities (Martignon & Krauss, 2009; Latten et al., 2011). This work presents an intervention study in twelve classes of 4th graders. The aim of the study was to find out whether children have probabilistic preconceptions of risk and decision making, and if they do, how to foster them.

Keywords: Risk, Proportions, Decision-making, Uncertainty, Real-life context

In 1995, the British Committee on Safety of Medicine's Evidence reported that the ingestion of third generation contraceptive pills raises the risk of having life-threatening thromboembolism by 100 % – compared to the ingestion of second generation contraceptive pills. This unclear communication in terms of the *relative risk* led to thousands of unwanted pregnancies and abortions because women overestimated the actual risk of the new pills (Gaissmaier & Gigerenzer, 2008).

The message would have been clear, if the Committee had used the *absolute risk* in terms of absolute numbers: 1 out of 7000 women who took the second generation pills should fear those threatening by-effects compared to 2 out of 7000 women who took the third generation pill. The increase of 100 % in this case is the increase from 1 to 2 – statistically seen a minor change. If one wants to communicate the true risk of this situation in this example, it is important to present both the numerator and denominator of the risk equation. Two things would have scaled down the scope of the catastrophe: a more transparent risk communication and a more numerate society.

Risk and Uncertainty

Risk and decision-making under uncertainty permeate many fields. Day by day global and far reaching scientific, social, environmental or political decisions have to be made. Risks and chances of nuclear energy, genetic modified crops or certain vaccinations have to be weighted up against each other. On a more local scale risk-related questions arise in our daily lives: "How should I invest my money?", "Should I do a certain medical checkup", "Are nutritional supplements dangerous?" or "Is it harmful to live next to a telephone pole?"

Whether on the global or local scale, questions concerning risk and decisions under uncertainty have to do with value based considerations of possible hazards or benefits (Pratt et al., 2011). By definition the risk or a risky event is one associated with a strictly positive probability of a loss of resources like health, time or money (Martignon & Krauss, 2009). Risk can be described as a function of two variables namely the likelihood of occurrence of a hazard and the impact that the hazard may cause on an individual or a group (Campbell, 2005). The two variables *likelihood* and *impact* can be seen as two dimensions which have to be integrated in a decision process. Yet it proves more difficult than it sounds, as the magnitude of the hazard or impact may not be foreseeable and the likelihood estimations may run into difficulties when information is limited.

Reasons for the Biased Perception of Risk

Information in form of data is a good basis for a reflected decision process. Especially in medical issues looking at health statistics (of i.e. chances of recovery with certain medical interventions) can ease difficult decisions. Research shows that people with low numeracy often have difficulty understanding health statistics (Gaissmaier et al., 2012; Gigerenzer et al., 2008). There are several reasons, why people struggle with correctly estimating risk-related situations.

Informed decision making in risk-related situations is impeded by the fact that most impacts and their associated consequences seem to be emotionally loaded (Pratt et al., 2011). Whether an impact is judged as high or low often depends on subjective criteria. These subjective criteria are influenced by past experiences, family, friends or cultural beliefs (Spiegelhalter et al., 2011). Therefore we often "fear what others fear" and act emotionally. Related to this are psychological mechanisms and an evolutional heritage that influence or even hamper good decision making (Gigerenzer, 2013). As a consequence individuals do not minimize total risk in everyday decision-making (Pratt et al., 2011). People tend to overestimate low risks like the swine influenza or vaccination but underestimate threatening risks like obesity, smoking or a computer tomography. This skewed risk perception leads to the fear of plane crushes, although planes are the safest vehicles (Gigerenzer, 2013).

Communication of risk

Informed decision making is based on data. Data can be presented in various ways: pictures, numbers, charts, graphs or language. Since risk-related data may be emotionally loaded, it is convenient to use representation formats that are objective, unbiased and easy to grasp for a wider public. Especially for lay audiences probabilities and numbers are a big challenge and this is why they should be exchanged or supported by graphical visualizations (Brase, 2008; Gresh, Deleris, & Gasparini, 2008; Spiegelhalter et al., 2011).

Findings of cognitive psychologists reveal evidence that the format of representation is crucial for understanding the real harm or chance of different options in situations of uncertainty. Frequency formats are much better processed by the human mind than ratios, decimals or percentages (Brase, 2008; Gigerenzer, 2013; Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Spiegelhalter et al., 2011; Schapira et al., 2001). One reason for this may lie in the fact that frequency formats reduce the cognitive load in computing the probabilities (Gresh et al., 2008). Graphical and analog representations in form of icon arrays support the comprehension of numerical information. This type of representations should be more leveraged in risk communication (Brase, 2008; Gaissmaier & Gigerenzer, 2008; Gresh et al., 2008; Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Schapira et al., 2001). Icon arrays use icons for each individual in a population with a certain attribute. This one-to-one match between individuals and icons invites to identification as it is directly seen as part of the whole population (Martignon & Kurz-Milcke, 2006b). Frequency formats in combination with graphical visualizations in form of icon arrays can help to understand statistical information (Figure 5.1). Those representation formats serve well for communicating statistical information as they can do part of the computation (Zhu & Gigerenzer, 2006).

Innumeracy and Statistical Illiteracy

As was mentioned above statistical information about risk is communicated by means of mathematical formats like ratios, fractions, percentages or decimals. Findings reveal difficulties of people in correctly reading and interpreting these formats (Gigerenzer, 2013; Gresh et al., 2008). Even replacing percentages by frequency formats does not always help

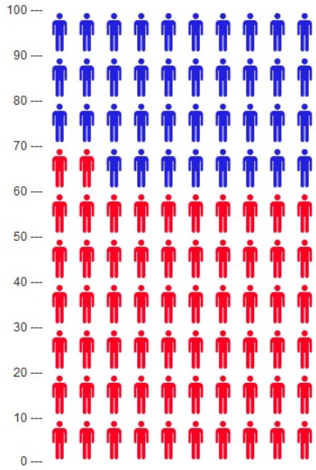


Figure 5.1: Icon array: a representation format which is easy to grasp

people understanding statistical information. *1 out of 1000* is sometimes seen as a larger ratio than *1 out of 10* (Galesic & Garcia-Retamero, 2010). Nevertheless, difficulties in correctly interpreting simple numerical tasks do not constitute the only problem. Findings of cognitive psychology and investigations of people's probabilistic thinking during the last 40 years reveal a flurry of cognitive illusions as well as probabilistic and statistical misconceptions (Kahneman & Tversky, 1979; Batanero et al., 1994; Garfield & Ahlgren, 1988; Kapadia, 2009).

What should be done (at school)?

In order to advance informed decision making, the emphasis should lie on a more transparent and intuitive communication of risk in public (Gigerenzer, 2013; Spiegelhalter et al., 2011). Even more important is to prepare young learners for the risks and uncertainties they already face and they will face their whole life. They should

> [...] comprehend and deal with uncertainty, variability, and statistical information in the world around them, and participate effectively in an information-laden society. (p. 3) (Gal & Garfield, 1997)

After they have finished their encounter with stochastics at school, students should have acquired competencies like

> [...] the ability to access, use, interpret, and communicate probability-related information and ideas, in order to engage and effectively manage the demands of real-world roles and tasks involving uncertainty and risk. (p. 4) (Gal, 2012)

This definition of *probability literacy* stresses out the importance of understanding uncertainty and risk. I use this definition although I will speak of *Risk Literacy* for the sake of emphasizing *risk*. De Haan et al. Haan et al. (2008) have formulated a list of competencies including general mathematical, probabilistic and statistical aspects that can or should be acquired at school:

- dealing with complex information: recognizing and trading-off risk, danger and uncertainty
- analyzing and judging about risks and dangers
- doing stochastic operations in risk-related real-life contexts; these considerations should be linked to equity and sustainable statements
- weighing up and discussing risks in risk-benefit and dilemma situations
- using heuristics for formulating adequate statements and gaining insights from that process, in order to plan the next actions

Based on the list of De Haan et al. (2008) the general focus lies on fostering competencies like reckoning with risk, modeling decisions in uncertain situations and interpreting graphs, numbers and frequencies in risk-related contexts by using mathematical tools. Although today elements of probabilistic thinking are taught in primary and secondary school, most of the educators are satisfied with a playful encounter of their pupils with probabilistic and statistical issues. These can be simple random experiments with urns, dies, spinners or simple statistical representations. This is a good way to introduce informal stochastic issues but remains at a tentative level. School- and graduate students often do not see the connections between randomness and real-life where uncertainty, variability and above all, risk are omnipresent. Kapadia (2009) writes:

> Hence the content of the current [stochastic] curriculum [of primary school] is relatively brief. It does give an overview but lacks important detail. Perhaps the most important omission is any reference to risk and hence to real-life applications. It is certainly true that the majority of teachers would make links to real-life situations, indeed they often occur in text-books. But the lack of reference to risk is very important in the context of the current world. (p. 374)

Risk Literacy – mathematical concepts

Preliminary explorative studies propose a tool box for decision-making and reckoning with risk (Martignon & Krauss, 2009). They analyze mathematical competencies like proportional reasoning, dealing with expected values and understanding conditional probabilities (Kurz-Milcke & Martignon, 2007; Martignon & Krauss, 2009). It is my view that this bundle of competencies, including the ability to distinguish between relative and absolute risk, provides excellent ways for modeling decisions under uncertainty.

Proportional Reasoning

Proportional Reasoning is not only a fundamental competency in science but also a crucial prerequisite for probabilistic reasoning and therefore for the notion of risk (Martignon & Krauss, 2009). In terms of risk, the probability of an event is often expressed as a ratio between two quantities. We only get a sense for risk magnitudes when taking into account both dimensions. Otherwise we might argue that *7 ill people out of 10* is "less" than *10 ill people out of 100* because *7* is "less" than *10*.

Expected Value

The expected value as the (sum of) product(s) of a value and its (their) associated likelihood(s) and the definition of risk underlie the same basic concept: outcomes are weighted with their probabilities. In the context of risk, the value is a quantified resource – like time, health or money. It follows that pondering between different options means comparing their expected values.

Conditional Probability

Conditional probabilities are reflected in many risky scenarios: the magnitude of risk in real-life always depends on certain conditions. The risk of infection of a certain disease depends on the area where people live, the health situation of individuals, medical conditions and the base rate of the disease.

All these situations can usually be described quantitatively in terms of conditional probabilities. Conditional probabilities and Bayesian inference are also fundamental concepts for understanding test diagnostics (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). Given a positive test result, what is the actual likelihood that the patient is ill? Not only laypersons but also experts are often biased when making such kinds of judgments (Eddy, 1982; Gigerenzer & Gray, 2011).

Relative and absolute risks

Relative and absolute risks are often misunderstood – not just by lay people. It turns out that there exists a huge ambiguity concerning the meaning of these technical terms and the associated percentages (Gigerenzer, 2013). The use of relative and absolute formats are often knowingly utilized to mislead the consumer or the patient (Wegwarth & Gigerenzer, 2011; Galesic & Garcia-Retamero, 2010). People ought to know that without taking into account the reference group, risk reductions and –increases cannot be interpreted correctly (see initial example).

Previous research on the understanding of risk of young children

Preliminary studies have investigated how competencies like understanding proportional reasoning, dealing with expected values and understanding conditional probabilities can be conveyed to primary school children (Latten et al., 2011; Martignon & Krauss, 2009). Fourth graders in Germany are not yet familiar with ratios and fractions; thus probabilities have to be translated into proportions and expressed in terms of frequency formats like: *2 out of 6*. These very intuitive numerical representations can be supported by concrete, hands-on materials, for instance colored tinker-cubes. Martignon and Krauss (2009) discussed a class experiment in which they introduced a tool box for decision making and reckoning with risk with 10 years olds. The tool-box consisted of play-based activities devised to make young students aware of the characteristics of uncertainty. Contents of the tool-box were tasks in elementary Bayesian reasoning, comparing proportions and discussing the risks and chances of different strategies in the game *Ludo*. The authors describe this playful, heuristic and informal encounter with probabilistic phenomena as a solid basis for the formal calculus of probability in higher grades (Martignon & Krauss, 2009). Nevertheless, this study lacked empirical consistency and statistical significance. The authors did not work with a control group, they did not compare children's performance before and after their activities and they did not test the sustainability of these activities. The presented ideas and games with children are inspiring and they motivate a well-calibrated school intervention.

Another relevant study was *RIKO-STAT* (Kuntze et al., 2010). The sample of the study consisted of students from grade 4 (elementary school), grade 9 (middle school) as well as students from university. The focus of the study was on the evaluation of students' competencies concerning presentation, interpretation and communication of statistical information. Part of the item pool referred to risk-related questions about conditional probabilities, proportions and decision-making in risk-benefit trade-off situations.

One finding of this study was that 4th graders already have intuitions and informal stochastic preknowledge about risk which show a moderate increase with age: the difference between the youngest and the oldest students in the sample was though not large. This study also motivates my school intervention: in fact, some of the tasks in my tests have been extracted from this study.

Researchers from Ludwigsburg University of Education and cognitive psychologists from the Harding Center for Risk Literacy in Berlin conducted a pilot study on *risk and decisions under uncertainty* in primary school (Latten et al., 2011). The intervention (6 lessons) included elements of dealing with risk-benefit situations, risk reductions, conditional probabilities and proportional reasoning. The results show that students increased their performances through the intervention. In this pilot study the researchers did not work with a control group and did not collect information about age, gender and mathematic skills in order to control for different variables. Furthermore, they did not carry out a follow-up test for the purpose of detecting long-term effects of the intervention. The present study complements these findings with a well-calibrated design. The tasks of the test instruments and the contents of the intervention have inspired my study. Yet they have been extensively modified.

Focus of my research

The aim of my research was to go beyond the described studies by gathering empirical evidence on the primary intuitions of probabilistic issues in the context of risk that students aged 8 to 10 exhibit. I wanted to show, namely, that these intuitions empower children to answer questions about risk in probabilistic tasks. At the same time I wanted to show that these intuitions can be fostered and strengthened through an intervention. My intervention was instructional and it aimed at fostering secondary intuitions in the sense of Fischbein (Fischbein et al., 1970a). Thus, two questions guided my research:

- Which primary intuitions do children aged 8 to 10 have about preconceptions of probability and decision making under uncertainty before they attend a corresponding learning unit?
- Is it possible by means of a well-designed intervention to foster these intuitions and preconceptions so that children develop early competencies in risk understanding?

Method

Sample

The study comprised 244 students of grade 4 aged from 8 to 12 ($M = 9.5, SD = .612$). They were students of 6 different schools in Ludwigsburg and its environs, in the state of Baden-Württemberg in southern Germany. The 131 girls and 113 boys came from twelve classes. For all of them it was the last year of primary school. The enquiry period reached from December 2012 to July 2013. Before the intervention started, the students had not been taught the contents of the learning unit. They had a minimum knowledge of probability and statistics corresponding to what is recommended by the German math standards of primary school. Nevertheless, as I think, many of the probabilistic intuitions children have stem from their extra-curricular experiences. The acquisition of classes was handled on the phone and information sheets on the procedure of the study were sent via E-mail. For the participating students, declarations of statements were submitted. There was no random assignment to treatment and control classes due to pragmatic reasons: some teachers wanted their classes to be part of the treatment whereas some other teachers wanted their classes only to serve as control classes. Because the sample size was large enough I had strong effect sizes and good power ($R^2 = .583, F_{222} = 2.646, f^2 = 1.398, 1 - \beta = 1.00$).

The Intervention

The intervention in form of a learning unit consisted of four single math lessons. In each lesson the students worked with hands-on material in form of colored tinker-cubes. The cubes served as tool for describing proportions. These proportions were then presented most of the time in form of icon arrays (Figure 5.2). This mix of enactive and iconic representations of information should ensure that students grasp the concept "proportions" intuitively through visual perception without the use of numeric representations (Scholz & Waschescio, 1986).

Urns with cubes inside were shaken by the children and thus became random generators. The teaching method consisted of a mix of classroom discussion and work in groups. The

Figure 5.2: Representation of 62 %: with tinker-cubes

students often had to make assumptions and give statements about different stochastic problems like: “What do you expect will happen?”, “Which option would you choose and why?” or “Which option is the *riskier* one?” Those assumptions were then tested empirically, by conducting experiments, and finally reflected and discussed. This approach ensured that students made intuitive and informal judgments. A given outcome then confirmed or refuted the assumptions about the probabilistic situation.

Lesson One The first lesson covered comparisons of simple proportions in risk-related contexts. The aim was to confront the students with proportions and directly embed this first encounter in a probabilistic context. Instead of a formal comparison of fractions students compared only simple proportions and argued in an informal manner. “Person A has three pens. Two of them work and the third is broken. Person B has four pens, two of which are broken (Figure 5.3). Which person takes better care of her or his pens?”

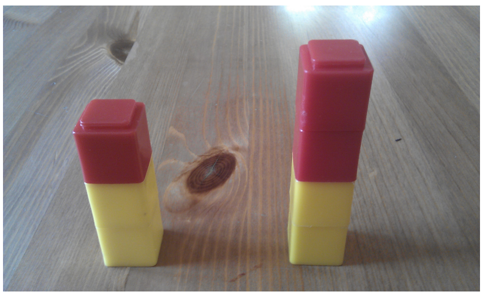


Figure 5.3: Informal comparison of proportions: *2 out of 3* > *2 out of 4*

Different examples were discussed. I decided to begin with easy tasks in which either the *winning / healthy / good* color (yellow or green cubes) or the *loosing / ill / bad* color (red) was equal in both samples. The more difficult tasks were those in which the proportion of colors was the same (*2 out of 4* compared to *5 out of 10*. The most

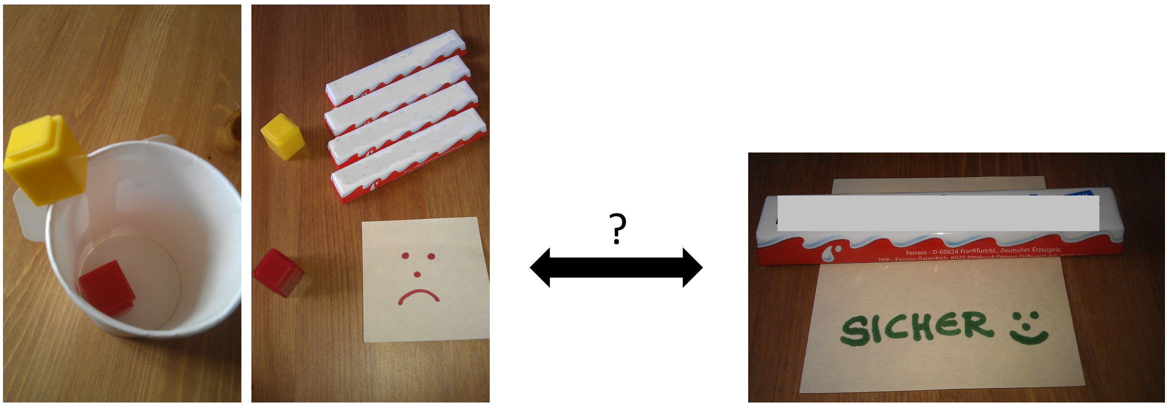


Figure 5.4: Trade-off situation: certain low win or uncertain high win?

difficult tasks were those in which the proportions in each sample were different (*1 out of 3* compared to *2 out of 10*).

After these comparisons different kinds of random experiments were done. I wanted the students to test empirically whether the higher proportion goes along with a higher probability. Therefore different samples were tested against each other by extracting blindly ten times from an urn. The results were noted on the board by means of a tally. Through this process the students experienced the connection between proportion and probability. A high proportion of one color in a certain sample led to higher frequencies of this color in that sample. They also realized that variability plays a role; for instance, a tinker-tower consisting of one yellow and one red cube at the beginning does not imply that after ten extractions one will have five red and five yellow marks in the tally. Children were helped by their visual perception when having to compare proportions expressed by tinker-towers.

Lesson Two During the following lesson students were confronted with a trade-off situation in which they had to weigh up two different options. One option was associated with a small but certain gain and one with an uncertain high gain. The small certain gain consisted of one candy bar. The high uncertain gain consisted of four candy bars (Figure 5.4). In case they chose the risky alternative they used a random generator consisting of an urn with a red and a yellow cube. Yellow was the winning color. After a discussion on the different alternatives, the students sat together in pairs and simulated the risky situation by running the random experiment ten times. On a working sheet they had to write about the comparison between the gains obtained repeating the random experiment ten times and gains obtained in the certain situation. At the end of the lesson the results of the different pairs were collected and compared. Finally, all students realized that the riskier option of this trade-off situation is associated with the higher gain on average. Yet, a few of the children maintained their opinion, to stay with the certain option rather than go for the risky one.

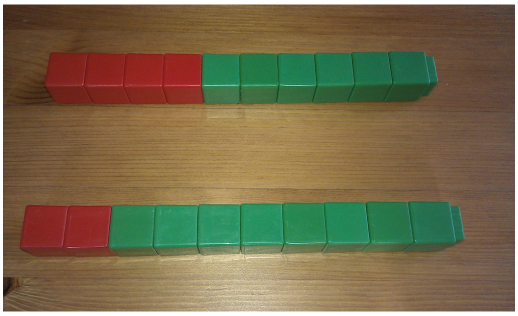


Figure 5.5: Risk reduction from *4 out of 10* to *2 out of 10*

Lesson Three The third lesson purported questions about risk reductions. We first talked about the risk that somebody gets hurt or the risk that something gets broken; by means of comparisons with tinker-cubes I led the students to argue about "risky scenarios", noting that these are often communicated by means of proportions and ratios. "I have five frisbees. Two out of these five frisbees get lost. Imagine, I have (10; 15; 20) frisbees, how many will get lost?" The students also learned that proportions or ratios can become higher or smaller when the situation changes: "I now have (10; 15; 20) but I am much more careful with my frisbees. The risk that one of them gets lost is half of what it was before. How many of the (10; 15; 20) frisbees will now get lost?" There was a lively discussion and other examples were described; the colored tinker-cubes served as visualization. The students received a worksheet on which they did tasks of this kind; they also had to invent and draw a situation in which a certain risk (in terms of a ratio or a proportion) changed with a new situation (Figure 5.5)

Lesson Four The fourth and last lesson comprised questions about conditional probabilities and Bayesian reasoning which were simulated and modeled by and with the children. At first the students discussed about how individuals differ from each other having different features. Those features were then encoded by the use of tinker-cubes which could be plugged together. The cubes represented the students' features; red and blue cubes stood for a certain feature, for example for girls and boys. Another feature, like long hair and short hair was then coded with yellow and green cubes, which were plugged to the blue and red ones. We then talked about the proportions of individuals and how the proportions change when new features are considered. "There are 8 boys (blue cubes) and 2 girls (red cubes). Some of children have short hair (green cubes) and some have long hair (yellow). You see someone with long hair (yellow). Is it a girl?" (Figure 5.6)

Students worked not only with the tinker-cubes, they simulated the situation themselves: ten of them whose features corresponded to the example, came to the blackboard and represented the situation. This way they recognized that the question above reduced the range considered from ten to three. They understood that the proportion which was relevant for the question was *1 out of 3*. On a working sheet they reported what they had done and illustrated the situation in several steps ("How many boys/girls are

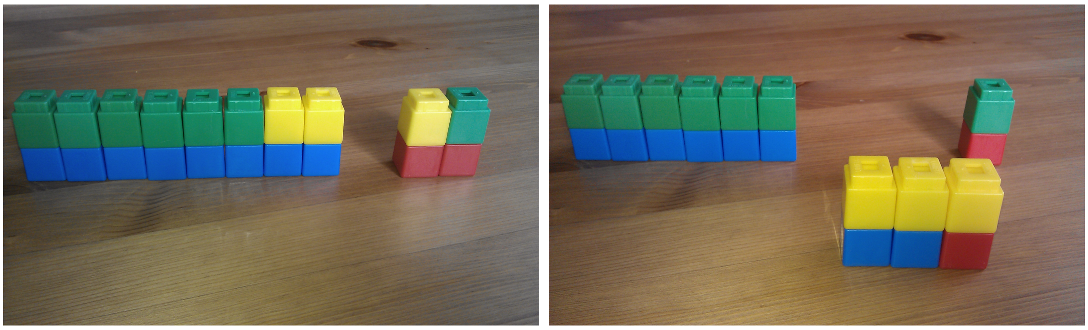


Figure 5.6: Bayesian reasoning: encoding of features via tinker-cubes

there at the beginning?", "Which of them have long/short hair?", "How many of those with long hair are girls?"). Afterwards, a transfer of these insights took place with other situations and the same materials.

Instrument

I conducted a pretest, a posttest and a follow-up test in each of the twelve classes. I constructed a new test instrument inspired from RIKO-STAT (Kuntze et al., 2010) and the pilot study from Latten et al. (2011). The test includes different tasks on elementary comparisons of probabilities, proportions and frequencies, expected values, simple sample distributions, conditional proportions as well as one task on risk reduction. The items consist partly of open questions where students have to formulate their answers to stochastic text problems. The rest of the items consists of closed tasks where the students had to mark the right answers or fill in blanks. The tests have the internal consistency of $\alpha_{\text{ pretest}} = .72$, $\alpha_{\text{ posttest}} = .82$ and $\alpha_{\text{ follow-up test}} = .81$.

In my study each of the tests took the students about thirty minutes. The items of the pre- post- and the follow-up test are equivalent as far as subject-specific contents and requirements are concerned; the structure, the order and cover stories of the items were different. This ensured that students did not perform better just by remembering what they had previously done. Each test sheet was coded. Information about the students' grades in Mathematics and German of the last school year and gender was collected anonymously.

Experimental Design

The intervention study should shed light on children's probabilistic intuitions which are useful in the context of risk. The experimental design investigated whether a specific training of competencies in risk literacy caused treatment classes to outperform the control classes significantly. Thus the sample was divided into a treatment group (8 treatment classes) and a baseline control group (4 classes). Before the intervention in form of a learning unit started, I conducted the pretest in each of the twelve classes in order to get information about foreknowledge about the contents to be trained. The treatment classes were taught about different contents during one week, while the control classes attended their regular math classes. One week after the pretest, all students had to do the posttest. After three months, I conducted a follow-up test in each of the twelve classes in order to get information about sustainable learning effects.

Data Analysis

A multiple regression analysis was conducted. The aim was to predict the posttest (follow-up test) performance for each student. Hence the affiliation to the treatment group or the control group was dummy-coded and served also as predictor for the criterion posttest score (follow-up test score). The independent variables *age*, *gender*, *pretest score*, *grade in mathematics*, *grade in German* and *test condition* were entered in the regression. For the performances in the pretest and the follow-up test the variances were equal for students from the treatment and the control group, F_{pretest} (1, 206) = .005, n.s. and $F_{\text{follow-up test}}$ (1, 206) = 1.734, n.s.. The variances of grades in mathematics were also equal in both groups, $F_{\text{grades in mathematics}}$ (1, 206) = .003, n.s.. Nevertheless, the variances for posttest scores were significantly different in the two groups, F_{posttest} (1, 206) = 4.585, $p < .05$. Hartley's test for $F_{\text{Max}} = 1.105 < 3$.

The evaluation of assumptions showed that there were very few outliers and these had no impact on the regression (Mahalanobis Distance $_{\text{Max}} = 10.4$; Cook Distance $_{\text{Max}} = .034$). The pre analysis showed no multicollinearity (*Regression 1* pretest → posttest: VIF $_{\text{Max}} = 1.351$; *Regression 2* pretest → follow-up test: VIF $_{\text{Max}} = 1.4$). Residuals of the prediction were homoscedastic. Cases with missing data were valued with zero points (student did not know the answer of an item).

Results

The assumption that students aged 8-10 have primary probabilistic intuitions has been corroborated by my experiment, because students in my sample were able to achieve about half of the total score of the pretest (50.9 %). Expectedly students from treatment and control classes achieved similar results on average. The descriptive statistics of the pretest performances reveal that almost all students had intuitions concerning simple comparisons of probabilities. Students showed also basic intuitions for conditional probabilities and very simple expected values. Despite general good intuitions (Figure 5.7), they had difficulties with less elementary tasks (Figure 5.8).

As conjectured, the intervention strengthened students' intuitions and fostered elementary competencies for risk assessment and probabilistic decision making. After the intervention students from the treatment classes answered 76.6 % of the tasks correctly, compared to only 61.1 % of the control classes. The follow-up test showed that the treatment classes achieved an average score of 66.1 %, while the control classes only achieved 55.9 %.

The results of the multiple regression analysis (Table 5.1) confirmed the effectiveness of the intervention. The adjusted R^2 of .58 indicates that more than 58 % of the variability

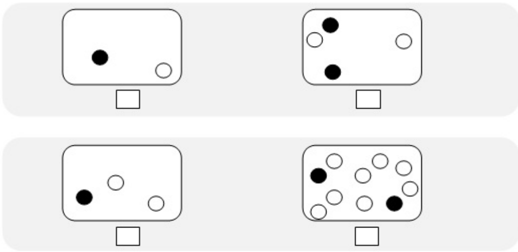


Figure 5.7: Simple comparisons of proportions: drawing black balls from an urn

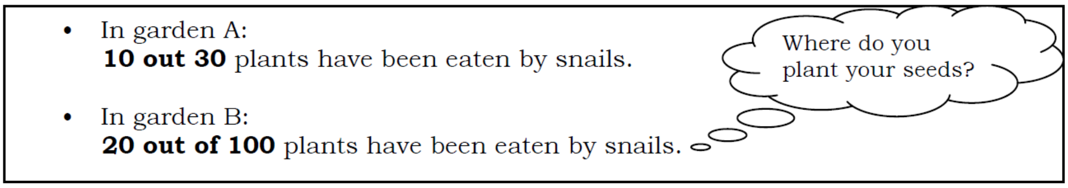


Figure 5.8: More difficult comparisons of proportions

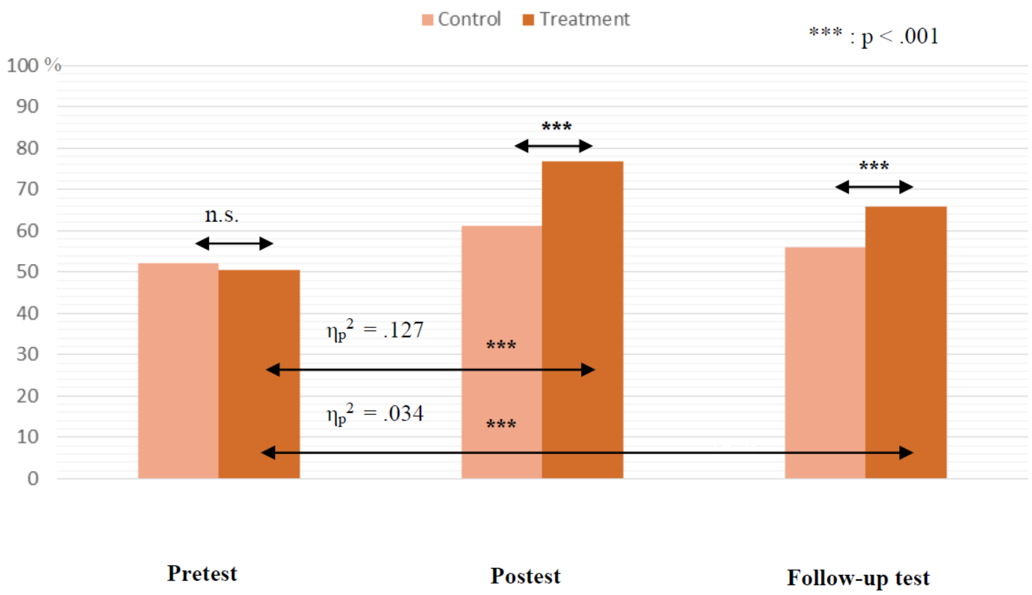


Figure 5.9: Pretest, posttest and follow-up test results

of the posttest performance can be predicted by the three variables *grades in mathematics*, *pretest score* and *test condition*.

The β coefficients of these variables were significant and therefore good predictors for the performance of the posttest. The variables *age* and *gender* had no significant β coefficients. Two models were calculated in order to outline the additional clarification of variance due to the further predictor *test condition*. The table shows that being part of

Table 5.1: Prediction of the posttest results

	Predictor	B	$SE\ B$	β
Step 1	Pretest score	.56	.08	.45*
	Grades in Mathematics	-1.47	.33	-.27*
Step 2	Pretest score	.60	.06	.48*
	Grades in Mathematics	-1.51	.27	-.28*
	Test condition	4.41	.46	.42*

Note. $R^2 = .40$ for Step 1, $\Delta R^2 = .18$ for Step 2 ($p < .001$), $* = p < .001$

the treatment (*test condition*) explains about 18 % of the variance of the posttest results. A multiple regression analysis was also carried out for the prediction of the follow-up test results.

Table 5.2: Prediction of the follow-up test results

	Predictor	B	$SE\ B$	β
Step 1	Pretest score	.49	.08	.39*
	Grades in Mathematics	-1.624	.34	-.31*
Step 2	Pretest score	.51	.07	.41*
	Grades in Mathematics	-1.68	.31	-.32*
	Test condition	3.12	.52	.30*

Note. $R^2 = .38$ for Step 1, $\Delta R^2 = .09$ for Step 2 ($p < .001$), $* = p < .001$

It turned out that the same variables showed significant β coefficients. The adjusted R^2 of .47 indicates that more than 47 % of the variability of the follow-up test performance can be predicted by the variables *grade in mathematics*, *pretest score* and *test condition*. The results indicate that there are long-term effects of the intervention, as the significant β coefficient *test condition* explains about 9 % of the variance of the follow-up test results. Thus, these results show that three months after the intervention students in the treatment group achieved significantly better follow-up test scores than students in the control group.

Discussion

This study shows that risk and decision making under uncertainty can be a prevailing, exciting and meaningful topic at the end of primary school with sustainable effects. It shows that it is possible to foster elementary competencies for risk assessment and probabilistic decision making in fourth class. The leitmotif of the study were representations by means of natural frequencies and icon arrays with hands-on materials in a playful learning environment, as advised by results of cognitive psychologists. With these representations children can think probabilistically without the need of fractions or percentages. The results of the pretest showed that students aged 8 to 10 have good probabilistic intuitions and the effectiveness of the intervention indicated that the students can develop secondary intuitions (Fischbein et al., 1970a).

The briefness of the intervention – 4 lessons – proves that fostering that bundle of competencies for reckoning with risk and uncertainty can be achieved without causing essential changes in the mathematical curriculum. Thus, such an intervention might easily become part of the curriculum in fourth grade. Current ways of teaching data and chance in elementary school classes are often reduced to some descriptive statistics ("Which is your favorite animal?") or gambling situations with dice and spinners. Relating these learning approaches to risk and decision-making under uncertainty would mean embedding them into a real-life context.

As Gigerenzer (Gigerenzer & Gray, 2011; Gigerenzer, 2013) has repeatedly pointed out elementary probability concepts should be taught in an informal and heuristic manner at an early stage. This can help children become prepared for the uncertainties of the modern technological world where the understanding of statistical information becomes more and more indispensable. The students I investigated had much fun performing random experiments, predicting, reflecting and discussing risk-related situations.

Acknowledgements

The author is a member of the "Cooperative Research Training Group" of the University of Education, Ludwigsburg, and the University of Tübingen, which is supported by the Ministry of Science, Research and the Arts in Baden-Württemberg. Correspondence concerning this article should be addressed to Christoph Till, Department of Mathematics and Informatics, University of Education, Ludwigsburg, L 71634.

E-mail: Till@ph-ludwigsburg.de

Literatur

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(4), 527–547.

Brase, G. L. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. Retrieved from http://www.k-state.edu/psych/research/documents/2009ACP.pdf

Campbell, S. (2005). Determining overall risk. *Journal of Risk Research*, *8*, 569–581.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 335–347). Cambridge: Cambridge University Press.

Fischbein, E., Pampu, I., & Minzat, I. (1970a). Comparison of ratios and the chance concept in children. *Child Developement*, *41*, 377–389.

Gaissmaier, W., & Gigerenzer, G. (2008). Statistical illiteracy undermines informed shared decision making. *Zeitschrift für Evidenz, Fortbildung und Qualität im Gesundheitswesen*, *102*, 411–413.

Gaissmaier, W., Wegwarth, O., Skopec, D., Müller, A.-S., Broschinski, S., & Politi, M. C. (2012). Numbers can be worth a thousand pictures: individual differences in understanding graphical and numerical representations of health-related information. *Health Psychology*, *31*(3), 286–296.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy. Needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. (pp. 1–7). Seoul, Korea.

Gal, I., & Garfield, J. B. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal, & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1–13). Amsterdam: IOS Press.

Galesic, M., & Garcia-Retamero, R. (2010). Statistical numeracy for health. A cross-cultural comparison with probabilistic national samples. *Archives of Internal Medicine*, *170*(5), 462–465.

Garfield, J. B., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics. Implications for research. *Journal for Research in Mathematical Education*, *19*(1), 44–63.

Gigerenzer, G. (2013). *Risiko. Wie man die richtigen Entscheidungen trifft.* München: Bertelsmann Verlag.

Gigerenzer, G., Gaissmaier, W., Kurz-Milcke, E., Schwartz, L. M., & Woloshin, S. (2008). Helping doctors and patients make sense of health statistics. *Association for Psychlogical Science*, *8*(2), 53–96.

Gigerenzer, G., & Gray, M. (2011). *Better patients, better doctors, better decisions: envisioning health care 2020.* Cambridge: MIT Press.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychologycal Review*, *102*(4), 684–704.

Gresh, D., Deleris, L. A., & Gasparini, L. (2008). Visualizing risk. *IBM research report.*

Haan, G. D., Kamp, G., Lerch, A., Martignon, L., Müller-Christ, G., & Nutzinger, H. (2008). *Nachhaltigkeit und Gerechtigkeit.* New York: Springer Verlag.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica*, *47*, 263–291.

Kapadia, R. (2009). Chance encounters – 20 years later. Fundamental ideas in teaching probability at school level. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 371–386.

Kuntze, S., Gundlach, M., Engel, J., & Martignon, L. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – empirical research in the project 'RIKO-STAT'. In *Proceedings of the 8th international conference on teaching statistics (ICOTS8)*. Ljubljana.

Kurz-Milcke, E., & Martignon, L. (2007). Stochastische Urnen und Modelle in der Grundschule. In *Tagungsband der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 181–203). Berlin.

Latten, S., Martignon, L., Monti, M., & Multmeier, J. (2011). Die Förderung erster Kompetenzen für den Umgang mit Risiken bereits in der Grundschule. Ein Projekt von RIKO-STAT und dem Harding Center. *Stochastik in der Schule*, *31*(1), 17–25.

Martignon, L., & Krauss, S. (2009). Hands-on activities for fourth graders: a tool box for decision-making and reckoning with risk. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 227–258.

Martignon, L., & Kurz-Milcke, E. (2006b). Educating children in stochastic modeling: games with stochastic urns and colored tinker-cubes. In *Proceedings of the 7th international conference on teaching statistics (ICOTS7)*. Salvador.

Pratt, D., Ainley, J., Kent, P., Levinson, R., Yogui, C., & Kapadia, R. (2011). Role of context in risk-based reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 322–345.

Schapira, M. M., Nattinger, A. B., & McHorney, C. A. (2001). Frequency or probability? A qualitative study of risk communication formats used in health care. *Medical Decision Making*, *21*, 459–467.

Scholz, R. W., & Waschescio, R. (1986). Kognitive Strategien von Kindern bei Zwei-Scheiben Rouletteaufgaben. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hannover: Franzbecker.

Spiegelhalter, D., Pearson, M., & Short, I. (2011). Visualizing uncertainty about the future. *Science*, *333*, 1393–1400.

Wegwarth, O., & Gigerenzer, G. (2011). Risikokommunikation: Nutzen und Risiken richtig verstehen. *Deutsches Ärzteblatt*, *108*(11), 568–569.

Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve bayesian problems: the role of representation in mental computation. *Cognition*, *98*, 287–308.

5.2 Artikel 2

Warum ist *1 von 2* wahrscheinlicher als *2 von 9*?

Denken in Verhältnissen als Basiskompetenz für die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Christoph Till

PH Ludwigsburg University of Education

Zusammenfassung
Im vorliegenden Artikel wird ein Ansatz zur Förderung elementarer stochastischer Kompetenzen in der Grundschule beschrieben. Befunde aus der kognitionspsychologischen und didaktischen Forschung belegen, dass Fehlvorstellungen und Fehlkonzepte im stochastischen Denken weit verbreitet sind, viele dieser Fehlvorstellungen jedoch auf das Darstellungsformat zurückzuführen sind, in welchem die Daten dargeboten werden. Kognitionspsychologen sprechen sich daher dafür aus, anhand geeigneter Repräsentationen in Form von Steckwürfeln (enaktiv), Piktogrammen (ikonisch) und natürlicher Häufigkeiten (numerisch) das Verständnis für Wahrscheinlichkeiten bereits vor der Einführung des Bruchzahl- und Prozentbegriffs zu schulen. Diese Art der Darstellung statistischer Information hat sich in diversen Studien sowohl für Erwachsene als auch Kinder als besonders gewinnbringend gezeigt. In einer Interventionsstudie wurde eine Lerneinheit in der 4. Grundschulklasse durchgeführt, um die Effektivität dieser Repräsentationsformate empirisch zu überprüfen. In vier Schulstunden wurden verschiedene Bereiche der mathematischen Risikomodellierung thematisiert. Dazu zählten: Vergleichen von Verhältnissen und Wahrscheinlichkeiten, Abwägen von Handlungsoptionen anhand von Zufallsexperimenten und die Auseinandersetzung mit sich veränderten Wahrscheinlichkeiten durch neue Information. Der Fokus des vorliegenden Artikels richtet sich auf den Proportionsbegriff als wesentliches Element für Wahrscheinlichkeiten. Die Studie sollte unter anderem empirische Belege liefern, ob das Verständnis für Proportionen anhand der genannten Repräsentationsformate gefördert werden kann und welche Strategien die Lernenden vor und nach der Lerneinheit zum Lösen von Wahrscheinlichkeits- und Häufigkeitsvergleichen verwenden. Aus den Ergebnissen geht hervor, dass Schülerinnen und Schüler von den Repräsentationsformaten profitieren, da sie nach der Einheit vermehrt auf korrekte multiplikative Strategien beim Verhältnisvergleich zurückgreifen.

Schlagworte: Stochastik, Risiko, Proportionales Denken, Repräsentationen

Background

Proportional Thinking is a basic prerequisite for the proper handling of frequencies and probabilities as well as for dealing with stochastics in general (Bryant & Nunes, 2012; Fischbein & Gazit, 1984; Shaughnessy, Ciancetta, & Canada, 2004). Students and even adults often fail to solve probabilistic tasks when proportional reasoning is required (Garcia-Retamero et al., 2010). When being confronted with tasks in which proportions have to be compared, they tend to rely on one dimension or use faulty two-dimensional additive strategies rather than arguing by two-dimensional multiplicative strategies (Falk et al., 2012; Fischbein & Gazit, 1984).

As a consequence young learners should early build on their stochastic intuitions by facing up to proportions and probabilities in a playful and heuristic learning environment. This can help to prevent the consolidation or development of misconceptions at an early stage. The suggested learning approach follows the EIS principle (Bruner, 1970); by the use of hands-on material like tinker-cubes (enactive), graphical representations like icon arrays (iconic) and natural frequencies (numerical) children are able to describe, compare and quantify proportions, frequencies and probabilities without the use of fractions and percentages (Martignon & Krauss, 2007, 2009). Natural frequencies and icon arrays have both been proved very useful to visualize probabilities, i.e. in health statistics when patients had to be informed about medical treatments (Gigerenzer, 2013; Garcia-Retamero et al., 2010).

Empirical evidence of the usefulness of this approach was collected through a one-week intervention study on *risk and decisions under uncertainty* in grade four of elementary school. Different competencies like dealing with expected values and conditional probabilities, knowing about the concept of risk reductions and proportional reasoning were fostered in a learning unit which lasted four lessons.

Aims

The main aim of the intervention study was to find out if different basic competencies for modeling risk can be detected and fostered by using intuitive representation formats like natural frequencies and icon arrays. In a partial study I focused on *proportional reasoning* in situations under uncertainty. The concept of proportions was fostered in two of the four lessons of the learning unit. The following questions were central for the current paper:

- Does the short intervention (2 lessons) already effect the understanding of proportions?

- Which strategies do students apply when dealing with proportions before and after the intervention?

Methods

Sample

The sample consisted of N = 244 students of grade 4 aged from eight to twelve (M = 9.5, SD = .612) out of six different schools in Ludwigsburg and its environs (Land Baden-Württemberg). The 131 girls and 113 boys came from twelve classes and for all of them it was the last year of primary school. The enquiry period reached from December 2012 to July 2013. Before the intervention started, the students had not been taught the contents of the learning unit. Though they already have had little experience with very simple random experiments and qualitative probability statements. The sample was divided into eight treatment classes ($N_{treatment} = 152$) and four control classes ($N_{control} = 92$). The students who were part of the control classes attended regular mathematic lessons from their teachers. I collected information about the students' age, gender and grades in mathematics. The latter served as indicator of one student's general cognitive skills.

Intervention

The intervention consisted of four single lessons which bundled together made up the learning unit. The lessons were about (...)

- comparing proportions and probabilities with the help of random experiments
- simulating and discussing risk-benefit-trade-offs
- extending proportions and probabilities, talking about risk reductions
- simulating situations in which proportions and probabilities change in light of new information.

In this partial study I focused on lesson 1 and 3. In those lessons the students were confronted with proportional reasoning tasks, in which simple frequencies and probabilities had to be compared. This happened by the help of hands-on material like colored tinker-cubes and icon arrays. Quantifications of the proportions happened by means of natural frequencies (i. e. *4 out of 10*). The next step was to motivate the concept of proportions by embedding them into a probabilistic context. Therefore urns with tinker-cubes inside were shaken by the children and thus became random generators. The students tested empirically if higher proportions go along with higher probabilities by drawing out of urns. In the second lesson first informal strategies of expanding natural frequencies were developed together (i.e. "*2 out of 6* soccer players are injured after a game. How many out of twelve players do you think are injured after a game?").

Instrument

The test instrument was a math test which consisted of different stochastic tasks. Each of the students of the sample was tested three times: at the beginning of the enquiry period (pretest), one week later after the learning unit (posttest) and once again three months later (follow-up test). The 25 test items contained open and closed questions about proportions, frequencies, expected values, risk reduction as well as conditional probabilities. The students had approximately 35 minutes time to do the tests. The students' performance in the posttest (follow-up test) was operationalized as an indicator for the students' understanding of the treated concepts.

For the current paper the focus was on the level of proportional reasoning. Therefore an extra sum score was computed for each test which only contained proportional reasoning tasks (proportional reasoning sum score PRSS). I looked at the PRSS before and after the learning unit in order to detect preknowledge and incremental knowledge through the intervention. Different strategies the students chose when comparing frequencies and probabilities were also of interest. This happened by analyzing a certain open proportional reasoning task. In this item the students had to formulate their arguments which of two proportions is higher and why.

Results

Effect of the intervention

The effect of the intervention could be statistically validated. Students from the treatment group attained significantly better posttest and follow-up test results regarding the PRSS. Among the crucial predictor test condition, preknowledge (pretest score) and general cognitive skills (grades in mathematics) were also significant predictors for the PRSS. There were no gender and age effects. All together the predictors with significant β weights explained 46 % of the posttest variance (32 % for the follow-up test). That is to say, 46 % (32 %) of the differences of the students' performance in the posttest (follow-up test) could be explained by the foregoing predictors. These results suggest long-term effects of the intervention.

Evaluation of strategies when comparing proportions

Most of the students were not able to reason proportionally when they did the pretest. They used either simple one-dimensional strategies or incorrect two-dimensional additive strategies. Nevertheless simple tasks in which the more probable out of two urns had to be chosen were done quite well. This suggests an intuitive knowledge of proportions. This preknowledge could be developed through the learning unit: the analysis of the posttest results showed that the intervention led to a higher amount of correct multiplicative strategies in the experimental group.

Discussion

The results of the intervention study show that children aged 8-12 have indeed intuitions concerning proportional reasoning. The students could raise their "level of proportional reasoning" through the intervention. Though this approach must be seen as an introductory encounter with the fostered concepts which has to be deepened in the following school years in secondary school.

The concept of proportions could successfully be fostered by means of hands-on material in the form of colored tinker-cubes and icon arrays as these representations formats are felt as “intuitive”. By applying natural frequencies students are able to quantify and compare proportions and probabilities without the use of fractions and percentages. This phenomenological approach helps students to really understand the nature of proportions and in a wider view the true nature of chance and randomness. In primary school this early and sustainable first encounter with probabilistic phenomena is often missed. As a consequence students in secondary school often struggle with statistical and probabilistic concepts that are experienced as “too complex” and “too formal”. The described approach could help to cross the bridge between playful encounter with probabilistic phenomena and their theoretical calculations.

Keywords: Risk, Probability, Proportional Reasoning, Representations

Einleitung

Die Einführung stochastischer Elemente in den deutschen Mathematikunterricht wurde spätestens seit den PISA-Ergebnissen und der Einführung der neuen Bildungsstandards von 2004 gestärkt (Martignon & Krauss, 2007). Dieser stärkere Fokus auf das Erlernen von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sollte einer allgemeinen stochastischen Grundbildung von Schülerinnen und Schülern Rechnung tragen. Ziel sollte sein, stochastische Kompetenzen in Form von probabilistischem Denken und das Verständnis für Daten zu fördern. Kinder und Jugendliche sollten demnach bereits früh Fähig- und Fertigkeiten erwerben, die ihnen den Umgang mit statistischer Information in ihrer Umwelt erleichtern. Dazu gehören nicht nur Kompetenzen wie das Lesen und Interpretieren von Diagrammen, sondern neben vielen weiteren auch Kompetenzen in Bezug auf die Durchführung statistischer Untersuchungen, den Umgang mit Risiko und Unsicherheit oder gar den sinnvollen Technologieeinsatz beim Hantieren mit Daten (Gal & Garfield, 1997).

Leider scheint die vielerorts praktizierte Unterrichtskultur zu stark und früh auf Formalismen, Rezepte und Techniken zu bauen (Gal & Garfield, 1997; Gigerenzer u. a., 2008; Kapadia, 2009). Diese scheinen jedoch auf lange Sicht nicht unmittelbar zum statistisch gebildeten Bürger beizutragen (Kahneman, 2011). Dieser Missstand fällt dann ins Gewicht, wenn Schwierigkeiten beim korrekten Umgang mit statistischer Information schwerwiegende Folgen haben – beispielsweise bei Entscheidungen über medizinische Behandlungen oder finanzielle Investitionen (Galesic & Garcia-Retamero, 2010; Gigerenzer, 2013; Spiegelhalter u. a., 2011).

In der Tat herrschte in der psychologischen Urteilsforschung seit den 1970ern die Meinung, dass das Trainieren von Fähig- und Fertigkeiten im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten nicht viel Wirkung bringe, da der menschliche Denkapparat auf diese nicht adaptiert sei (Sedlmeier, 2001). Einige Forscher vertreten diesen Standpunkt auch heute noch (Kahneman, 2011).

Ein gegensätzlicher, optimistischerer Standpunkt ist der, dass Menschen durchaus stochastische Intuitionen besitzen, gut mit Wahrscheinlichkeiten umgehen können und somit auch nicht kognitiven Verzerrungen hilflos ausgeliefert sind. Voraussetzung dafür ist, dass die verwendeten Informationen in geeigneten Darstellungsformaten präsentiert werden (Hoffrage u. a., 2002; Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Gigerenzer, 2013). Kognitionspsychologen gehen davon aus, dass Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten in Form von Prozenten und Brüchen nicht immer sinngemäß interpretiert werden, da diese nicht der Art und Weise entsprechen, wie der Mensch seine Umwelt wahrnimmt (Gigerenzer, 2013; Sedlmeier, 2001). Sie besitzen einen erhöhten Abstraktionsgrad und erfordern daher bei der Interpretation eine zusätzliche Übersetzung. Der Prozentsatz von 50 % enthält etwa Informationen, die man nicht direkt aus der Zahl herauslesen kann. Was beschreiben diese 50 % nun? *1 von 2*, *33 von 66* oder *2000 von 4000*? Mathematisch sind diese Verhältnisse zwar äquivalent, aus statistischer Sicht jedoch entspricht jedes dieser Verhältnisse einer anderen Situation. Es gibt jedoch auch Möglichkeiten, Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten, Anteile etc. auf eine Art und Weise zu kommunizieren, dass sie leicht interpretierbar sind. Diese werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

Natürliche Häufigkeiten statt Prozentzahlen

Ein Informationsformat, welches als „natürlich“ empfunden wird, sind sogenannte „natürliche Häufigkeiten“ (Hoffrage u. a., 2002). Anders als bei Angaben relativer Häufigkeiten in Prozent verzichtet man bei natürlichen Häufigkeiten auf eine Normierung auf 100. Es gehen somit keine Informationen über Grundanteile verloren. *4 von 20* ist besser verständlich und somit leichter interpretierbar als der Prozentsatz von 20 % (Sedlmeier, 2001). Geht man nun über die einfache Beschreibung von Anteilen einer Grundgesamtheit hinaus und interessiert sich für Untergruppen dieser Anteile, wird der Vorteil dieses Darstellungsformats noch ersichtlicher:

- „4 von 20 Personen sind krank. 2 von den 4 erkrankten Personen müssen in ein Krankenhaus eingeliefert werden.“
- „20 % der Personen sind krank. 50 % der erkrankten Personen müssen in ein Krankenhaus eingeliefert werden.“

Ausgedrückt in Form von Prozenten und bedingten Proportionen sind diese Informationen sehr viel schwieriger zu verstehen. Damit in Zusammenhang stehende Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten und Bayesianischem Schließen werden durch den Einsatz natürlicher Häufigkeiten in ihrer Komplexität stark reduziert. Dass die Darstellung statistischer Information in Form von natürlichen Häufigkeiten im Vergleich zur Darstellung in Form von Prozentsätzen transparenter und verständlicher ist, zeigt eine Reihe von Studien aus der psychologischen Urteilsforschung (Sedlmeier, 2001). So konnten Gigerenzer und Hoffrage (1995) zeigen, dass die Fehlerrate bei Aufgaben zum statistischen Schließen durch das als natürlich empfundene Informationsformat erheblich gesenkt werden konnte. Sowohl bei der Aufklärung von Patienten und Ärzten über Chancen und Risiken medizinischer Behandlungen als auch im schulischen Unterrichten von bedingten Wahrscheinlichkeiten haben sich natürliche Häufigkeiten als sehr hilfreich erwiesen (Gigerenzer & Gray, 2011; Wassner, 2004; Zhu & Gigerenzer, 2006).

Piktogramme – visueller Zugang zu Verhältnissen und Wahrscheinlichkeiten

Ikonische Darstellungen in Form von Piktogrammen erleichtern darüber hinaus die Verarbeitung der Information (Abbildung 5.10). Davon können vor allem Menschen profitieren, die sich beim Lesen und Interpretieren statistischer Information eher schwer tun (Brase, 2008; Gaissmaier u. a., 2012). Nicht nur Erwachsene, sondern vor allem auch Kinder im Grundschulalter können mithilfe der vorgestellten Repräsentationsformate wie den natürlichen Häufigkeiten und den Piktogrammen erste Erfahrungen mit Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten machen.

Natürliche Häufigkeiten und Piktogramme für die Grundschulstochastik

Die Primarstufe eignet sich sehr gut dafür, Kindern stochastische Phänomene näherzubringen (Falk u. a., 2012; Fischbein & Gazit, 1984; Martignon & Krauss, 2009; Neubert, 2012). Durch einen spielerischen und informellen Zugang zur Wahrscheinlichkeit und

Abbildung 5.10: Unterschiedliche Repräsentationsformate für relative Anteile

Statistik anhand von Zufallsexperimenten und eigenen statistischen Erhebungen können Kinder auf bereits vorhandene stochastische Intuitionen aufbauen (Fischbein & Gazit, 1984). Diese Intuitionen treten häufig in Form von zielführenden Strategien beim stochastischen Problemlösen auf. Gesellschafts- und Würfelspiele sowie zufällige Phänomene in der Umwelt der Kinder tragen erheblich zur Formung dieser stochastischen Intuitionen bei (Büchter u. a., 2005).

Neben den guten Intuitionen herrschen bei Kindern im Grundschulalter aber auch viele Fehlvorstellungen und Fehlkonzepte vor (Büchter u. a., 2005). Diese sollten durch den Unterricht abgebaut und nach und nach durch korrekte stochastische Denkweisen ersetzt werden (Fischbein & Gazit, 1984). Beschreibungen von Wahrscheinlichkeiten durch Begriffe wie *sicher*, *möglich* und *unmöglich* beherrschen Kinder bereits im Alter von sechs bis acht Jahren (Cadez & Skrbec, 2011). Noch spannender sind beispielsweise Fragen, die sich auf die Größe von Wahrscheinlichkeiten beziehen. „Zwei Ereignisse A und B sind wahrscheinlich, aber welches von beiden ist wahrscheinlicher? Gibt es eine Möglichkeit, durch Zahlen die Wahrscheinlichkeiten zu beschreiben?“ Normalerweise werden diese Fragen (wenn überhaupt) in der Sekundarstufe ab Klasse 6 behandelt, indem Wahrscheinlichkeiten in Form von Brüchen und Prozenten berechnet werden. Der hier beschriebene Ansatz verlagert dies durch den Einsatz von natürlichen Häufigkeiten auf die Primarstufe. Prozentzahlen und Brüche werden hierfür nicht benötigt.

Zur Illustration ein Beispiel, wie dies geschehen kann: Befinden sich in einer Urne zwei schwarze und drei weiße Kugeln, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen *2 von 5*. Kinder erkennen schnell, dass sie bei dieser Urne eher eine schwarze Kugel ziehen, als in einer Urne mit zwei schwarzen und 20 weißen Kugeln. Das Argument „Man kann nicht sagen, aus welcher Urne man eher eine schwarze Kugel zieht – das ist Zufall.“ wird von den Kindern nach und nach abgelegt, wenn die Anzahl weißer Kugeln sukzessive erhöht wird, sodass *2 von 5* mit *2 von 40* verglichen werden muss. Ebenso können die meisten Kinder im Grundschulalter nachvollziehen, dass die Wahrscheinlichkeit *2 von 3* größer ist als die Wahrscheinlichkeit *1 von 3*. Schwieriger ist der Vergleich der Wahrscheinlichkeiten *1 von 3* und *2 von 4*. An dieser Stelle treffen unterschiedliche Argumentationen aufeinander, die für Schülerinnen und Schüler im ersten Moment beide plausibel erscheinen mögen. Ist die zweite Wahrscheinlichkeit nun größer, da hier die Gewinnchance von 50 % höher ist als bei der Wahrscheinlichkeit *1 von 3*?

Eine andere Argumentation wäre folgende: Die Differenz aus schwarzen und weißen Kugeln in den beiden Urnen beträgt jeweils 2. Es ist demnach egal, aus welcher Urne gezogen werden soll. Diese Beispielaufgabe ist ein guter Lernanlass für eine erste Begegnung von Grundschülerinnen und Grundschülern mit Verhältnissen. In den folgenden Abschnitten soll deutlich werden, dass das Denken in Verhältnissen ein wichtiges Konzept für die Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellt.

Fehlkonzepte beim Umgang mit Verhältnissen

Der Proportionsbegriff ist unerlässliche Basis für die Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (Bryant & Nunes, 2012; Fischbein & Gazit, 1984; Martignon & Krauss, 2007; Shaughnessy u. a., 2004). Verhältnisse werden benötigt, Wahrscheinlichkeiten unter bestimmten Modellannahmen zu beschreiben (Barzel & Kleine, 2013). Interessiere ich mich für die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses, setze ich die Anzahl günstiger ins Verhältnis zu allen möglichen Ereignissen. Zwei Wahrscheinlichkeiten sind demnach gleich, wenn ihre Verhältnisse zueinander äquivalent sind (*2 von 4* = *4 von 8* = 50 %). Diese Äquivalenz zweier Verhältnisse fällt unter den Begriff *Proportion* (Koerber, 2003).

Die Forschung zeigt, dass dieses „ins Verhältnis setzen“ oft misslingt. Typische Denkfehler und fehlerhafte Strategien beim Hantieren mit Proportionen sind sehr robust und bleiben daher häufig über die Schulzeit hinaus bestehen (Falk u. a., 2012). Aufgaben, in welchen die Inhalte zweier Urnen (unterschiedliche Anzahl erwünschter und unerwünschter Objekte) verglichen werden sollten, zeigen, dass Fehlkonzepte beim Proportionsvergleich bei Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen aller Altersklassen zu finden sind (Denes-Raj & Epstein, 1994). Das Fehlkonzept basiert auf der Schwierigkeit, bei der Betrachtung von Verhältnissen beide Größen eines Verhältnisses simultan zu erfassen. Soll etwa aus zwei Behältnissen das ausgewählt werden, welches das größere Verhältnis von blauen zu weißen Kugeln enthält, reicht es nicht aus, lediglich die jeweilige absolute Anzahl der blauen Kugeln in den Behältnissen zu betrachten (Abbildung 5.11).

Im Beispiel ist das Behältnis mit der geringeren Anzahl blauer Kugeln das günstigere. Darüber hinaus muss erkannt werden, dass Proportionen multiplikativen und nicht additiven Gesetzen folgen. Das heißt, ein Verhältnis kann nur durch die Multiplikation beider Größen mit demselben Faktor zu einem äquivalenten Verhältnis erweitert werden, jedoch nicht durch Addition beider Größen mit derselben Konstante:

Durch Multiplikation beider Größen mit dem Faktor 2 wird aus dem Verhältnis *1 von 3*, das äquivalente Verhältnis *2 von 6*. Wird dies nicht erkannt, spricht man vom additiven Fehlkonzept (Koerber, 2003). Probanden gehen dann fälschlicherweise davon aus, dass durch die Addition von 1 zu beiden Entitäten des Verhältnisses ein äquivalentes entsteht: *1 (+1) von 3 (+1)* = *2 von 4*. Diese fehlerhaften Differenzstrategien treten nicht nur bei Schülerinnen und Schülern aller Altersklassen auf, sondern ebenso bei Erwachsenen (Koerber, 2003).

Bei der Entwicklung des Proportionsbegriffs müssen also zwei Hürden überwunden werden: Zunächst muss erkannt werden, dass beide Größen eines Verhältnisses relevant sind, wenn Verhältnisse verglichen werden. Darüber hinaus müssen Lernende verstehen,

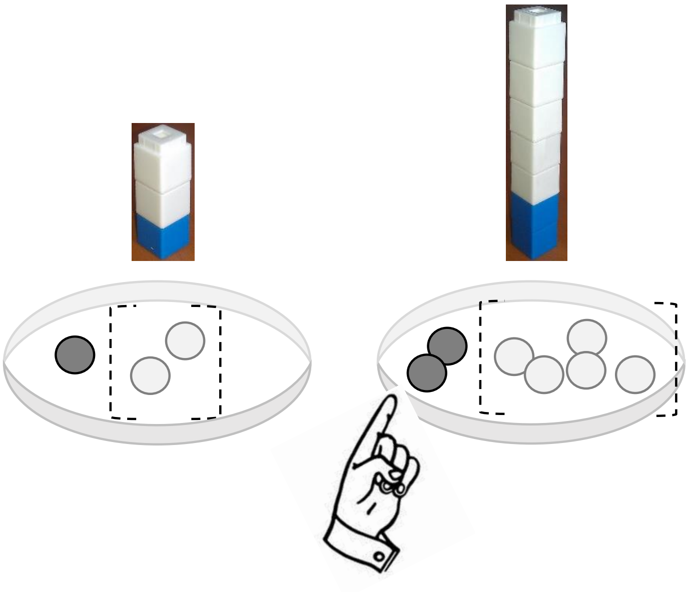


Abbildung 5.11: Ausblenden von Größen beim Verhältnisvergleich

dass Verhältnisse multiplikativen und nicht additiven Gesetzen folgen. In diesem Zusammenhang spricht man auch von *eindimensionalen* und *zweidimensionalen* Strategien beim Verhältnisvergleich (Koerber, 2003). Während bei eindimensionalen Strategien Größen ausgeblendet werden, so werden bei zweidimensionalen Strategien alle Größen betrachtet. Differenzstrategien sind demnach fehlerhafte zweidimensionale Strategien, multiplikative hingegen korrekte zweidimensionale Strategien.

Studien zur Entwicklung proportionalen Denkens im Kindes- und Jugendalter

Die Lösungsrate eines Beispielitems – der Urnenvergleich mit schwarzen und weißen Kugeln – aus der PISA-Studie aus dem Jahre 2003 zeigt, dass selbst noch viele junge Lernende im Alter von 15 Jahren dieses Fehlkonzept vorweisen. Bei einer Aufgabe, in der es darum ging, sich für die günstigere zweier Urnen zu entscheiden, waren 73 % der Jugendlichen der Meinung, das Verhältnis *2 von 7* sei größer als das Verhältnis *1 von 3* (Pisa Konsortium, 2004). Intuitiv fokussierten die Jugendlichen in diesem Beispiel wohl auch die schwarzen Kugeln aus der jeweiligen Urne und blendeten die weißen Kugeln aus. Dies ist ein Hinweis darauf, dass rechnerische Fertigkeiten im Umgang mit Brüchen längst nicht auf einen voll entwickelten Proportionsbegriff schließen lassen.

Ähnliche Defizite beim Verhältnisvergleich zeigen sich auch in psychologischen Untersuchungen. In einer Studie sollten erwachsene Probanden Gesundheitsrisiken einschätzen, indem sie zwei relative Häufigkeiten – bestehend aus kranken und gesunden Personen – vergleichen sollten. Dabei zeigte sich, dass die Teilpopulation der Gesunden oft ausgeblendet wurde und nur die Teilpopulation der „Kranken“ in den Entscheidungsprozess integriert wurden. In der gleichen Studie konnte gezeigt werden, dass durch den Einsatz geeigneter Darstellungen (in diesem Fall Piktogramme) einigen dieser Fehler vorgebeugt werden konnte (Garcia-Retamero u. a., 2010). Den Probanden fiel es durch die Visualisierung leichter, das jeweilige Verhältnis aus Gesunden und Kranken ins Verhältnis zu setzen. Diese beiden Studien machen darauf aufmerksam, dass proportionales Denken auch von Jugendlichen und Erwachsenen nicht immer beherrscht wird, dass jedoch bestimmte Darstellungsformate helfen können, die Einsicht in das gestellte Problem zu schärfen.

Im Allgemeinen geht man davon aus, dass sich das proportionale Denken mit zunehmendem Alter eines Kindes entwickelt (Denison & Xu, 2013; Falk u. a., 2012; Fischbein & Gazit, 1984). Der schwierigste Schritt dabei ist die Ablösung fehlerhafter additiver Strategien durch korrekte multiplikative Strategien. Bei der Frage, ab welchem Alter dieser Konzeptwechsel stattfindet, widersprechen sich einige Wissenschaftler. Piaget und Inhelder (1975) waren der Meinung, dass Kinder erst mit einer bestimmten kognitiven Reife im Alter von 12 oder 13 Jahren in der Lage sind, proportionale Strategien zum Lösen von Wahrscheinlichkeitsaufgaben anzuwenden. Eine ähnliche Sichtweise auf die Entwicklung proportionalen Denkens vertreten Falk und Wilkening (1998). Sie untersuchten Kinder im Alter zwischen 6 und 13 Jahren und konnten zeigen, dass die geringe Anzahl proportionaler Strategien nur bei den 11-13-jährigen Kindern zu finden waren, jedoch nicht bei den jüngeren Kindern.

Ähnliche Befunde zeigten sich bei Fischbein und Gazit (1984). In ihrer Studie mit 10-12-jährigen Kindern zeigte ein 12-stündiges Training zum Lösen von Wahrscheinlichkeitsaufgaben durch Anwendung proportionaler Strategien keinen Erfolg. Die Kinder verbesserten sich durch die Intervention unmerklich. Jedoch konnten Fischbein und Gazit zeigen, dass der größte Teil der 12-jährigen Kinder die Aufgaben sowohl vor als auch nach der Intervention korrekt lösen konnte; die jüngeren Kinder, die dasselbe Training erhielten, brachten jedoch kaum korrekte Lösungen hervor.

In einer aktuelleren Studie aus dem Jahre 2012 konnten Falk u. a. (2012) bestätigen, dass über die Hälfte der Kinder bis zum Alter von etwa 7 Jahren lediglich jeweils eine Größe beim Verhältnisvergleich betrachten (eindimensionale Strategien). Ab diesem Alter argumentieren die Kinder dann größtenteils anhand zweidimensionaler Strategien, wobei hier noch fehlerhafte additive Strategien dominieren. Ab etwa 10 Jahren verwenden über 80 % der Kinder additive oder korrekte multiplikative zweidimensionale Strategien.

Aufgrund der hohen Fehlerraten unter den jüngeren Kindern darf man jedoch nicht den Schluss ziehen, Kinder unter 10 Jahren könnten per se nicht proportional denken. Denison und Xu (2013) konnten zeigen, dass bereits Kleinkinder im Alter von einem Jahr in Ansätzen proportionale Heuristiken besitzen. Bei der Studie wurden Kleinkindern Behälter mit unterschiedlichen Verhältnissen schwarzer und bunter Lollies gezeigt und daraus Lollies verdeckt entnommen. Die Kleinkinder mussten dann zum Behälter krabbeln, von dem sie glaubten, darunter befände sich mit größerer Wahrscheinlichkeit ein bunter Lollie. In dieser und weiteren Versuchsanordnungen zeigte sich, dass die Kleinkinder tendenziell zum „günstigeren“ Behälter krabbelten, was statistisch gesehen nicht mehr mit dem Zufall erklärt werden konnte.

Mögliche Gründe für die uneinheitlichen Forschungsbefunde

Zusammenfassend ergeben die Befunde zur Entwicklung proportionalen Denkens ein recht uneinheitliches Bild. Es ist nach wie vor unklar, ab wann Kinder und Jugendliche anfangen, proportional zu denken. Erschwerend zur Beantwortung dieser Frage ist die Tatsache, dass auch immer Aufgabe, Aufgabenformat und Aufgabenschwierigkeit einen Einfluss auf die vom Kind gewählte Strategie zu haben scheint (Moore, Dixon & Haines, 1991; Steinthorsdottir, 2006). Zudem unterscheiden sich die Aufgaben in den verschiedenen Studien im Schwierigkeitsgrad. Müssen etwa die Verhältnisse *2 von 3* und *3 von 9* miteinander verglichen werden, können bereits einfach proportionale Heuristiken von Kindern zur Lösung herangezogen werden: *2 von 3* ist bereits „mehr als die Hälfte“, während *3 von 9* „weniger als die Hälfte“ beschreibt. Ob aber *2 von 3* oder *3 von 5* das größere Verhältnis darstellt, kann für Jugendliche oder Erwachsene durchaus eine nicht leicht zu beantwortende Frage sein. Die Argumentation über die Annäherung mittels „der Hälfte“ kann hier nicht mehr zur Lösung herangezogen werden.

Eine weitere mögliche Erklärung für die teils widersprüchlichen Befunde könnte diese sein: Bereits im Kindesalter vorhandene Intuitionen zum Proportionsbegriff – wie sie bei Denison und Xu (2013) auftraten – könnten allmählich verschwinden, wenn diese nicht entsprechend gefördert werden. In der Primarstufe wird üblicherweise nur mit absoluten Größen gerechnet, in der Sekundarstufe geht man nach einer Einführung der Bruchzahlen in der 5. oder 6. Jahrgangsstufe schnell in kalkülhaftes Umformen und Berechnen von Brüchen über. Die hierbei erlernten Techniken zum Umgang mit Brüchen helfen dann nur bedingt, Aufgaben wie die aus der PISA-Studie zu lösen. Die 15-jährigen Schülerinnen und Schüler erkannten womöglich nicht die proportionale Natur der Aufgabe. Proportionale Lösungsstrategien, die sich vom formalen Berechnen entfernen, konnten somit erst gar nicht abgerufen werden. Ein Beispiel für eine solche Argumentation wäre: „In Urne 1 sind dreimal so viel ungünstige wie günstige (*1 von 3*. In Urne 2 sind mehr als dreimal so viel ungünstige wie günstige *2 von 7*. Also ist Urne 1 die günstigere von beiden.“

Ich gehe davon aus, dass das Denken in Verhältnissen im schulischen Unterricht nur bedingt gelehrt und gelernt wird. Dies würde auch die Tatsache erklären, dass die Verwandtschaft zwischen Bruchzahl, Prozenten und Proportionen für viele Lernende nicht ersichtlich ist, obwohl sie lediglich Perspektiven auf ähnliche Zusammenhänge darstellt (Barzel & Kleine, 2013).

Ziel der Studie und Fragestellung

Primäres Ziel der Studie ist es, aufzuzeigen, wie gute Repräsentationsformate Schülerinnen und Schülern dabei helfen können, ihre mathematischen Intuitionen zum Proportionsbegriff zu stärken und diese zu tragfähigen Konzepten aufzubauen. Mithilfe geeigneter visueller (Steckwürfel, Piktogramme) und numerischer (natürliche Häufigkeiten) Repräsentationen von Verhältnissen sollen Kinder dazu angeregt werden, auf vorhandene stochastische Intuitionen zu bauen und somit beim Verhältnisvergleich fehlerhafte durch korrekte Strategien zu ersetzen. Eine Interventionsstudie soll empirische Belege liefern, ob bereits eine kurze Konfrontation von zwei Schulstunden zu ersten Konzeptwechseln beim Umgang mit Verhältnissen führen kann. Mit Konzeptwechseln ist das allmähliche Ablösen und Ersetzen fehlerhafter durch korrekte Strategien beim Verhältnisvergleich gemeint. Da dies ein kontinuierlicher Prozess ist, schließt ein erfolgreicher Konzeptwechsel nicht aus, dass ein Kind – je nach Schwierigkeit der Aufgabe – vereinzelt auf bereits abgelöste Strategien zurückgreift.

Die in diesem Artikel vorgestellten Befunde zur Entwicklung des Proportionsbegriffs anhand geeigneter Darstellungen sind Teil eines größeren Projekts zur Beforschung eines Förderansatzes zur Entwicklung von Risk Literacy in der Grundschule. Bei Till (2014) wird dieser Förderansatz im Gesamten vorgestellt und dargelegt, dass die Schülerinnen und Schüler durch die vierstündige Intervention in den geförderten Kompetenzen gestärkt werden konnten. In diversen qualitativen Studien zeigte sich, dass der Ansatz über enaktive Materialien sehr erfolgsversprechend ist und bereits in der Grundschule durchgeführt werden kann (Martignon & Krauss, 2007). Empirische Evidenz zur Sinnhaftigkeit dieses Ansatzes gibt es bisher noch wenig. Die vorliegende Studie soll durch ihr längsschnittliches Design einen Beitrag dazu leisten. In der vorliegenden Teilstudie zur Entwicklung des proportionalen Denkens sollten Antworten auf die folgenden Fragen gefunden werden:

- Kann das proportionale Verständnis durch geeignete Darstellungsformate gefördert werden?
- Welche fehlerhaften/korrekten Strategien besitzen die Schülerinnen und Schüler vor und nach der Intervention?

Methodik

Design

Eine Interventionsstudie mit Kontroll- und Experimentalgruppe, deren Leistung zu drei Messzeitpunkten (Vortest, Nachtest, Follow-up Test) gemessen wurde, sollte Aufschluss über die Wirksamkeit der Intervention liefern (Abbildung 5.12). Acht Klassen waren Teil der Experimentalgruppe ($N_{\text{Experimentalgruppe}} = 152$), vier Klassen dienten als Kontrollgruppe ($N_{\text{Kontrollgruppe}} = 92$). Es erfolge keine randomisierte Zuteilung der Klassen zur jeweiligen Experimentalbedingung. Eine systematische Verzerrung durch unterschiedliche Voraussetzungen kann jedoch ausgeschlossen werden; die durchschnittlichen Testleistungen der Klassen waren vor der Intervention nicht signifikant voneinander verschieden. Der Leistungszuwachs im proportionalen Denken wurde mithilfe einer multiplen Regressionsanalyse festgestellt. Die unabhängigen Variablen Alter, Geschlecht, Mathematiknote, Vortestergebnis und Versuchsbedingung dienten als Prädiktoren für die abhängige Variable proportionales Verständnis. Das proportionale Verständnis wurde anhand eines Summenscores der Proportionsaufgaben operationalisiert.

Stichprobe

An der Studie nahmen insgesamt N = 244 Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen acht und zwölf Jahren teil ($M=9.5$; $SD=.612$). Die Schülerinnen und Schüler stammten

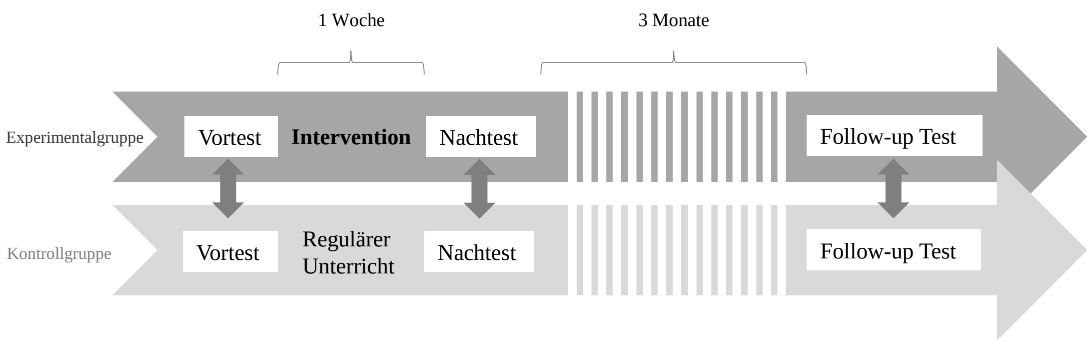


Abbildung 5.12: Design der Interventionsstudie

aus zwölf Klassen aus sechs Grundschulen im Umkreis von Ludwigsburg (Land Baden-Württemberg). Die Schülerinnen und Schüler hatten vor dem Erhebungszeitraum wenig schulische Erfahrung mit der Stochastik und kein Vorwissen zum Proportionsbegriff.

Instrumente

Als Instrument wurde ein selbst entwickelter Wissenstest eingesetzt (Cronbachs $\alpha_{\text{Vortest}} = .72$, $\alpha_{\text{Nachtest}} = .82$ und $\alpha_{\text{Follow-up Test}} = .81$). Dieser enthielt offene und geschlossene Fragen zu den Inhalten der Intervention und wurde von den Schülerinnen und Schülern vor, einen Tag nach und drei Monate nach der Einheit bearbeitet. Vortest, Nachtest und Follow-up Test unterschieden sich lediglich durch die Reihenfolge, in der die Aufgaben gestellt wurden, die Zahlen innerhalb der Aufgaben und die Geschichten, in welche die Aufgaben eingebettet waren. Es war somit gewährleistet, dass die Tests bezüglich ihrer Schwierigkeit vergleichbar waren. Die Bearbeitungszeit war mit 35 Minuten großzügig bemessen. Die Schülerinnen und Schüler hatten somit ausreichend Zeit, alle Testaufgaben in Ruhe zu bearbeiten und Kinder mit etwaigen Defiziten im Textverständnis hatten genug Zeit für die Bearbeitung von für sie sprachlich anspruchsvolleren Testaufgaben. Der Test enthielt Aufgaben zum Erwartungswert, bedingten Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeitsverteilungen, Risikoreduktion und Wahrscheinlichkeits- und Häufigkeitsvergleichen (maximale Punktezahl: 27). Die Auswertungen des Summenscores aller Items findet man bei Till (2014). Im vorliegenden Artikel wird jedoch nur von den Items zum Proportionsbegriff berichtet. In die Analyse gehen daher nur Aufgaben zu den Wahrscheinlichkeits- und Häufigkeitsvergleichen ein (maximale Punktezahl: 10). Die Aufgaben waren vom Typ: Ziehen aus Urnen (6 Aufgaben; Abbildung 5.13), Erweitern eines Verhältnisses (1 Aufgabe; Abbildung 5.14) und Vergleichen relativer Häufigkeiten (1 Aufgabe; Abbildung 5.15).

Aus diesen Aufgaben wurde ein Summenscore „proportional reasoning sum score PRSS" errechnet. Im Ergebnisteil wird darüber berichtet, welchen durchschnittlichen PRSS Kontroll- und Experimentalgruppe erzielten. Darüber hinaus wird jeweils ein Item aus

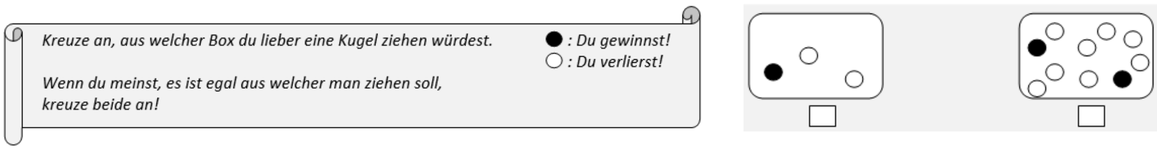


Abbildung 5.13: Beispielitem: Urnenvergleich

Abbildung 5.14: Beispielitem: Erweitern eines Verhältnisses

Abbildung 5.15: Beispielitem: Vergleich relativer Häufigkeiten

den drei genannten Kategorien exemplarisch herausgegriffen und die Lösungsraten werden analysiert.

Intervention

In der vierstündigen Intervention wurden verschiedene Kompetenzen zur mathematischen Modellierung von Risiko gefördert. Hierzu gehörten elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten, der Begriff der Risikoreduktion, Erwartungswerte und der Proportionsbegriff. Die Intervention wurde von mir in insgesamt acht Grundschulklassen, der reguläre Mathematikunterricht in den vier Kontrollklassen von den jeweiligen Fachlehrkräften durchgeführt.

Im vorliegenden Artikel werden nur die Inhalte von zwei dieser insgesamt vier Schulstunden vorgestellt, in welchen es um die Förderung des Proportionsbegriffs ging. Auf die anderen beiden Schulstunden wird an dieser Stelle nicht eingegangen. Die genauen Inhalte der kompletten Unterrichtseinheit findet man bei Till (2014).

Der Proportionsbegriff als wesentliches Element für den Wahrscheinlichkeitsbegriff wurde explizit in der 1. Stunde „Verhältnisse und Wahrscheinlichkeiten“ und 3. Stunde „Erweitern von Verhältnissen“ thematisiert. In diesen zwei Stunden wurde darauf verzichtet, Regeln für den Umgang mit Verhältnissen vorzugeben. Stattdessen sollte der Proportionsbegriff im Unterricht durch Gespräche, Diskussionen und Experimenten gefördert werden. Visuelle Repräsentationen sollten die Kinder dabei unterstützen, auf vorhandene Intuitionen zum Proportionsbegriff aufzubauen. Die Frage, ob ein großes Verhältnis auch mit einer großen Wahrscheinlichkeit verknüpft ist, war leitend für die Intervention. Steckwürfel dienten als enaktive Repräsentation von Verhältnissen und zugleich als Zufallsgenerator, indem die Steckwürfel aus einer Urne gezogen wurden. Diese Kombination verwandelte den Vergleich von Verhältnissen in einen Vergleich von Wahrscheinlichkeiten (Martignon & Krauss, 2007). Die Kinder sollten erkennen, dass Verhältnisse nicht Selbstzweck sind, sondern in der Stochastik als Werkzeug für die Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten fungieren.

Verhältnisse und Wahrscheinlichkeiten vergleichen: Verschiedene Verhältnisse wurden anhand von Steckwürfeln repräsentiert (enaktiv). Dadurch hatten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Verhältnisse selbst nachzustecken, sie visuell zu erfassen und mit anderen Verhältnissen zu vergleichen. Der Schwierigkeitsgrad beim Verhältnisvergleich wurde langsam gesteigert. Zunächst wurden Verhältnisse in den Blick genommen, die in einer Größe übereinstimmten (*2 von 3* und *2 von 5*). Danach wurden äquivalente Verhältnisse betrachtet (*5 von 10* und *20 von 40*). Schließlich sollten Verhältnisse verglichen werden, die weder äquivalent sind, noch in den beiden Größen übereinstimmen (*1 von 3* und *2 von 8*). Schülerinnen und Schüler sollten dadurch erste Kompetenzen des informellen Vergleichs von Verhältnissen erwerben. Ein möglicher informeller Vergleich könnte dann lauten: „(. . .) das große Türmchen besteht aus mehr wünschenswerten roten Würfeln, jedoch auch aus vielen blauen Würfeln – das Verhältnis von rot zu blau ist beim kleinen Türmchen daher besser“ (Abbildung 5.16).

Die visuelle Wahrnehmung des ganzen Türmchens als Einheit sollte es den Kindern erleichtern, beide Größen der Verhältnisse (beispielsweise blaue und rote Steckwürfel) zu integrieren. Der nächste Schritt bestand darin, die Verhältnisse mit Wahrscheinlichkeiten zu verknüpfen. Dies wurde dadurch gewährleistet, dass die Steckwürfeltürmchen, die verschiedene Verhältnisse repräsentierten, gleichzeitig auch als Zufallsgenerator fungierten. Die Bauteile des Turms wurden dafür auseinandergesteckt und in eine Urne geworfen. Es wurde dann empirisch überprüft, ob große Verhältnisse (Bsp.: 8 rote von insgesamt 10 Steckwürfeln) beim zehnmaligen Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen auch mit einer häufigeren Ziehung roter Steckwürfel einhergehen.

Durch natürliche Häufigkeiten konnten die Wahrscheinlichkeiten quantifiziert werden. Lagen beispielsweise in einer Urne insgesamt fünf Kugeln, davon drei rote und zwei gelbe, dann war die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen: P (rote Kugel) = *3 von 5*. Der Vorteil dieser Ausdrucksweise ist die Ähnlichkeit zum Bruchzahlbegriff (3/5). Die Schülerinnen und Schüler benutzten diese Ausdrucksweise, ohne dass auf die Verwendung dieser hingewiesen wurde.

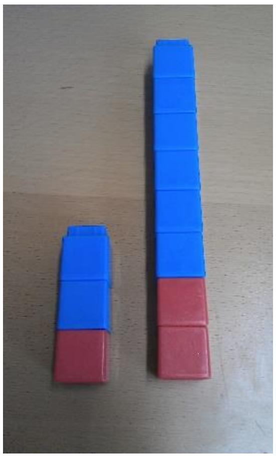


Abbildung 5.16: Informeller Vergleich von Verhältnissen mithilfe von Steckwürfeln

Verhältnisse und Wahrscheinlichkeiten erweitern: In der zweiten Stunde lag der Fokus auf den Strategien zum Erweitern von Verhältnissen. Dafür wurden zusammen mit den Schülerinnen und Schülern einfache Verhältnisse (Bsp.: *1 von 3*) anhand von Steckwürfeln nachgesteckt. Kurzgeschichten sollten das Erweitern dieser Verhältnisse motivieren: „Stell dir vor, von drei Fußbällen geht ein Fußball im Laufe einer Saison kaputt. Was denkst du, wie viele Fußbälle würden dann von insgesamt sechs oder neun Fußbällen kaputt gehen? (*1 von 3 = 2 von 6 = 3 von 9*)“. Es wurden Piktogramme eingesetzt, um die zuvor als Türmchen dargestellten Verhältnisse und Häufigkeiten visuell zu erfassen und schriftlich festzuhalten (ikonisch). Die Schülerinnen und Schüler verglichen dann verschiedene Verhältnisse miteinander, indem sie Piktogramme gegenüberstellten und rudimentäre Strategien des Erweiterns anwendeten, die zuvor im Klassenverband besprochen wurden.

Ergebnisse

Der Ergebnisteil ist in zwei Teile gegliedert. Zunächst wird von der Wirksamkeit der Intervention berichtet und somit die Frage beantwortet, ob die Schülerinnen und Schüler ihr proportionales Verständnis durch die Intervention weiterentwickeln konnten. Im zweiten Teil werden die von den Kindern verwendeten Strategien beim Verhältnisvergleich beleuchtet. Dazu werden exemplarisch drei Aufgaben und deren Lösungsraten zu allen Messzeitpunkten analysiert.

Wirksamkeit der Intervention

Der Effekt der Intervention kann statistisch abgesichert werden. Das Regressionsgewicht für den Prädiktor Versuchsbedingung wird im Regressionsmodell signifikant. Somit kann von der Wirksamkeit der Intervention auf den Leistungszuwachs im proportionalen Den-

Tabelle 5.3: Vorhersage der Testleistung zum Proportionsbegriff: Nachtest

	Predictor	***B***	***SE B***	***β***
Step 1	Pretest score	.39	.08	.31*
	Grades in Mathematics	-.63	.15	-.27*
Step 2	Pretest score	.37	.07	.29*
	Grades in Mathematics	-.71	.13	-.30*
	Test condition	2.20	.23	.48*

Note. $R^2 = .23$ for Step 1, $\Delta R^2 = .23$ for Step 2 ($p < .001$), $* = p < .001$

Tabelle 5.4: Vorhersage der Testleistung zum Proportionsbegriff: Follow-up Test

	Predictor	***B***	***SE B***	***β***
Step 1	Pretest score	.32	.08	.26*
	Grades in Mathematics	-.59	.16	-.26*
Step 2	Pretest score	.31	.08	.25*
	Grades in Mathematics	-.66	.14	-.29*
	Test condition	1.63	.25	.36*

Note. $R^2 = .19$ for Step 1, $\Delta R^2 = .13$ for Step 2 ($p < .001$), $* = p < .001$

ken ausgegangen werden. Die Prädiktoren Geschlecht und Alter tragen nicht signifikant zur Vorhersage des PRSS bei. Die Prädiktoren Vortestergebnis, Mathematiknote und Versuchsbedingung haben signifikante Regressionsgewichte und erklären zusammen eine Varianz von etwa 46 % der Nachtestergebnisse (Tabelle 5.3). Das heißt, 46 % der Unterschiede des Abschneidens der Schülerinnen und Schüler im Nachtest können durch die genannten Prädiktoren erklärt werden. Interaktionseffekte sind keine zu verzeichnen (Untersuchte Interaktionen: Messzeitpunkt * Geschlecht * Bedingung; Messzeitpunkt * Bedingung * Mathematiknote). Es wurden zwei Modelle gerechnet:

- Modell 1: UV – Vortestergebnis, Mathematiknote
- Modell 2: UV – Vortestergebnis, Mathematiknote, Versuchsbedingung

Ein ähnlicher Effekt ist bei der Vorhersage der Ergebnisse im Follow-up Test zu verzeichnen. Die Varianzaufklärung beträgt hier etwa 32 % und die gleichen Prädiktoren erhalten signifikante Regressionsgewichte (Tabelle 5.4). Dies lässt auf einen nachhaltigen Lerneffekt schließen. Auch drei Monate nach der Intervention schnitten Schülerinnen und Schüler, die Teil der Experimentalgruppe waren, signifikant besser ab als vergleichbare Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe. Aus der Tabelle für die Vorhersage der Testleistung im Follow-up Test geht hervor, dass eine Schülerin oder ein Schüler der Treatmentgruppe im Schnitt etwa ein bis zwei Punkte mehr erreicht als eine Schülerin oder ein Schüler der Kontrollgruppe (B=1.6).

Durch die alleinige Betrachtung des PRSS können lediglich allgemeine Aussagen über die Entwicklung des proportionalen Verständnisses gemacht werden. Spezifische Aussagen

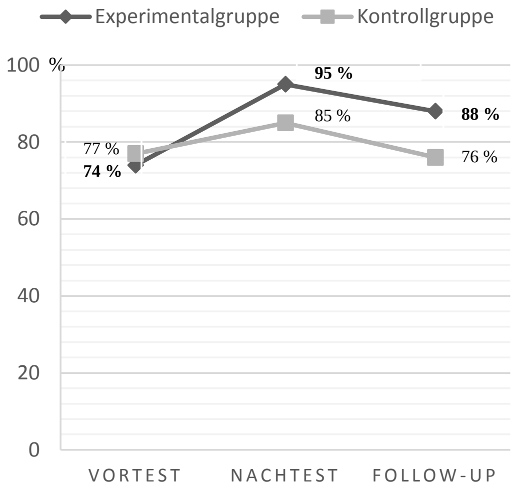


Abbildung 5.17: Lösungsraten des Urnenvergleichs zu drei Testzeitpunkten

über die verwendeten Strategien beim Verhältnisvergleich sollen im folgenden Abschnitt anhand der Betrachtung einzelner Aufgabentypen getroffen werden.

Strategien beim Vergleichen von Verhältnissen

Urnenvergleich: Die im vorherigen Kapitel vorgestellte Urnenvergleichsaufgabe (Abbildung 5.13) war eine von insgesamt sechs solcher Aufgaben und wurde zu allen drei Testzeitpunkten gestellt. Die Mehrheit der Lernenden aus Kontroll- und Experimentalgruppe beantwortete die Aufgabe bereits vor der Intervention korrekt. Der Prozentsatz korrekter Antworten konnte durch die Intervention dennoch gesteigert werden. Während Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe zum 3. Testzeitpunkt wieder auf das Ausgangsniveau fielen, waren die Lösungsraten der Lernenden aus der Experimentalgruppe noch immer auf einem höheren Niveau (Abbildung 5.17).

Trotz der guten Lösungsraten kann auch bei dieser Aufgabe keine Aussage über die gewählte Strategie der Kinder getroffen werden, da sowohl fehlerhafte additive als auch korrekte multiplikative Strategien zielführend sind. Die korrekte multiplikative Strategie besteht aus der Erweiterung des Verhältnisses aus der linken Box *1 von 3* zum äquivalenten Verhältnis *2 von 6* mit anschließender Gegenüberstellung zum Verhältnis *2 von 10* der rechten Box. Ziehen Schülerinnen und Schüler fehlerhafte additive Strategien (Differenzstrategien) heran, bilden sie die jeweiligen Differenzen der Verhältnisse und stellen diese gegenüber. Die Differenz von 2 (zwischen schwarzen und weißen Kugeln) bei der linken Box ist dann „günstiger“ als die Differenz von 8 bei der rechten Box. Lediglich der eindimensionale Vergleich der schwarzen Kugeln führt zur falschen Antwort der Aufgabe.

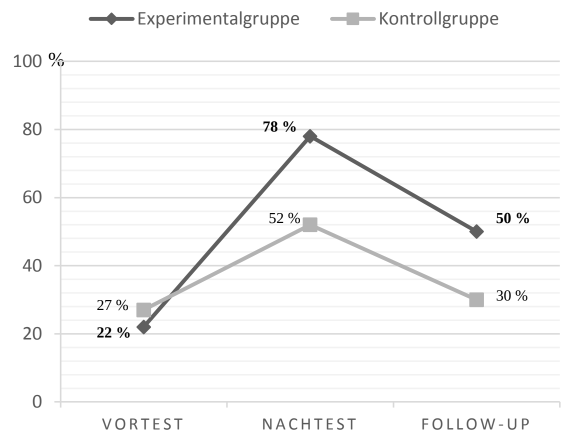


Abbildung 5.18: Lösungsraten zu drei Zeitpunkten: Erweitern eines Verhältnisses

Erweitern vorgegebener Verhältnisse: Für dieses Item (Abbildung 5.14) mussten die Schülerinnen und Schüler ein vorgegebenes Verhältnis erweitern. Man erkennt, dass die Experimentalgruppe im Nachtest sehr gute Lösungsraten hervorbrachte. Drei Monate nach der Intervention gingen diese jedoch wieder leicht zurück. Dieser Rückgang ist vermutlich einem leichten Vergessenseffekt geschuldet. Dennoch konnte jedes zweite Kind aus der Treatmentgruppe diese Aufgabe lösen. Schülerinnen und Schüler aus der Kontrollgruppe fallen auf das Ausgangsniveau zurück. Die Graphik zeigt einen leichten (aber nicht signifikanten) Anstieg der Testleistung der Kontrollgruppe zum Nachtestzeitpunkt.

Vergleichen relativer Häufigkeiten: Im folgenden Abschnitt werden die Lösungen des letzten der drei Items zum Proportionsbegriff vorgestellt (Abbildung 5.15). Hier sollten zwei relative Häufigkeiten miteinander verglichen werden. Im Folgenden sind die gewählten Strategien der Schülerinnen und Schüler zu allen Testzeitpunkten dargestellt. Die Tatsache, dass von den Schülerinnen und Schülern schriftliche Antworten verlangt wurden, ermöglicht Aussagen zu den gewählten Strategien beim Verhältnisvergleich. (Kategorisierung der Antworten im Anhang)

Vor der Lerneinheit konnte die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe nicht richtig lösen. Etwa die Hälfte der Schüler verwendete entweder eindimensionale Strategien oder zweidimensionale Differenzstrategien. Korrekte multiplikative Strategien findet man kaum (Abbildung 5.19).

Mit der Intervention erhöhte sich der Anteil an multiplikativen Lösungen in den Antworten. Auch in der Kontrollgruppe konnte diese Tendenz festgestellt werden, jedoch nicht im gleichen Ausmaß. Gründe hierfür könnten Testtrainingseffekte oder eine als etwas leichter erlebte Aufgabe im Nachtest sein. Nichtsdestotrotz griff jeder vierte Schüler nun auf die korrekte multiplikative Strategie zurück. Der Anteil der Kinder, die im Nachtest keine Begründung lieferten, ging in der Experimentalgruppe stark zurück. Die Tatsache, dass der Anteil eindimensionaler Strategien in etwa konstant blieb, lässt vermuten, dass

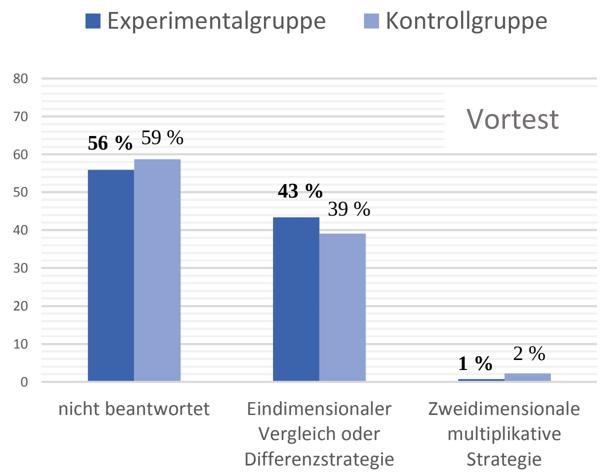


Abbildung 5.19: Strategien beim Vergleich relativer Häufigkeiten: Vortest

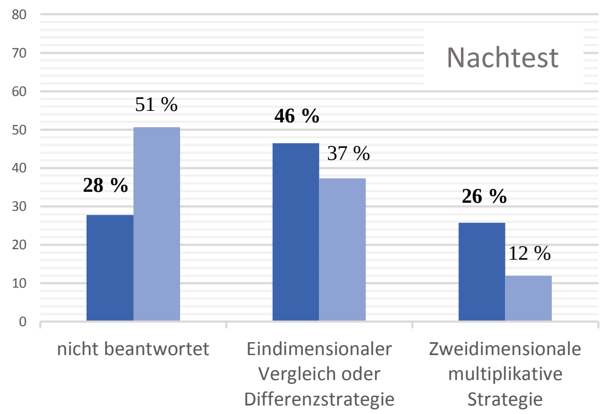


Abbildung 5.20: Strategien beim Vergleich relativer Häufigkeiten: Nachtest

es eine „Umschichtung" gab. Kinder, die zuvor keine Begründung lieferten, wählen nun eindimensionale Strategien oder argumentieren mit Differenzstrategien. Lernende, die im Vortest bereits diese Strategien wählten, griffen nun vermehrt auf multiplikative Strategien zurück (Abbildung 5.20).

Drei Monate nach der Intervention konnten noch immer etwa 12 % der Schülerinnen und Schüler korrekt multiplikativ argumentieren. Diese Zahl ist zwar absolut gesehen gering im Vergleich zum noch viel geringeren Prozentsatz korrekter Lösungen der Kontrollgruppe aber beträchtlich (Kontrollgruppe 2 %) (Abbildung 5.21).

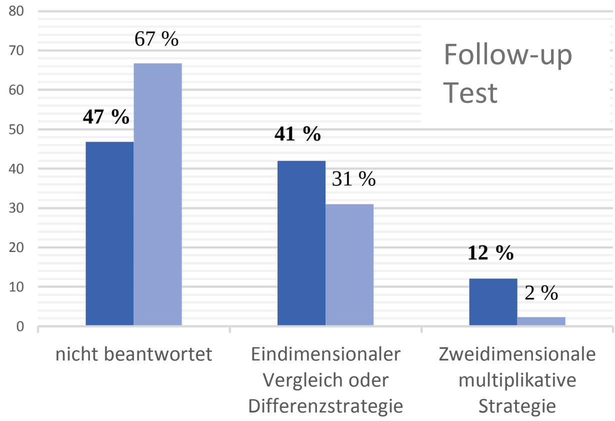


Abbildung 5.21: Strategien beim Vergleich relativer Häufigkeiten: Follow-up Test

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen acht und zehn Jahren Vorwissen in Form mathematischer oder stochastischer Intuitionen zum Proportionsbegriff besitzen und erste elementare Strategien zum Vergleichen von Verhältnissen entwickeln können. Es konnte festgestellt werden, dass sich das Aufgabenformat auf die Wahl der Strategie auswirkt, auf welche die Kinder beim Verhältnisvergleich zurückgreifen. Dies bestätigt die Tatsache, dass die Stufen beim Erwerb proportionalen Denkens nicht hierarchisch durchlaufen werden. Ein Kind kann sich je nach Aufgabe auf unterschiedlichen Stufen bewegen, ohne dass dies ihm dies widersprüchlich erscheint (Falk u. a., 2012).

Dass die Schülerinnen und Schüler bereits nach einer Zeit von zwei Schulstunden ihr Repertoire an korrekten Strategien beim Verhältnisvergleich erweitern konnten, liegt meiner Meinung nach an den eingesetzten Repräsentationsformaten, deren Sinnhaftigkeit aus Befunden der kognitionspsychologischen Forschung hervorgeht. Steckwürfel bieten zunächst einen enaktiven Zugang zu Häufigkeiten und Verhältnissen und ikonische Darstellungen in Form von Piktogrammen erlauben Verhältnisvergleiche. Diese Vergleiche basieren nicht auf formalen Berechnungen, sondern auf visueller Wahrnehmung von Verhältnissen und einfachen informellen Strategien. Durch natürliche Häufigkeiten können die Lernenden dann erste Quantifizierungen vornehmen ohne auf Bruchzahl- und Prozentbegriff zurückgreifen zu müssen. Dies verhindert möglicherweise das Aneignen und Anwenden von rezeptartigen Regeln beim Vergleichen und Erweitern von Verhältnissen.

Nur etwa 12 % der Schülerinnen und Schüler aus der Treatmentgruppe griffen zum 3. Testzeitpunkt beim Item zum Vergleich relativer Häufigkeiten auf multiplikative Strategien zurück. Dies ist ein Hinweis darauf, dass durch Unterricht proportionales Denken bereits in der Primarstufe angebahnt werden kann, der Erwerb des Proportionsbegriffs jedoch einem langen Lernprozess unterliegt. Des Weiteren muss angemerkt werden, dass das Item zum Vergleich relativer Häufigkeiten im Follow-up Test vermutlich schwieriger war als die entsprechenden Items im Vor- und Nachtest. Während im Vortest *10 von 30* mit *20 von 100* und im Nachtest *10 von 20* mit *20 von 100* verglichen werden musste, ging es im Follow-up Test um den Vergleich zwischen *10 von 30* mit *20 von 70*. Die Verhältnisse *10 von 20* und *20 von 70* liegen näher beieinander als die Verhältnisse in der vergleichbaren Aufgabe im Vor- und Nachtest und unterliegen dadurch möglicherweise einem höheren Schwierigkeitsgrad. Dies könnte neben anderen Erklärungen, wie einen leichten Vergessenseffekt, der Grund für den leichten Abfall korrekter Lösungen vom Nachtest zum Follow-up Testzeitpunkt sein.

Um den Verhältnisbegriff zu motivieren, wurde die Brücke zur Wahrscheinlichkeit geschlagen: Steckwürfeltürmchen dienten nicht nur als Beschreibung von Verhältnissen; ihre Einzelteile fungierten – in eine Urne geworfen – als Zufallsgenerator. Diese Einbettung in eine stochastische Lernumgebung sorgte – wie sich gezeigt hat – für eine motivierende Anwendung von Verhältnissen. Die Schülerinnen und Schüler erkannten die Proportion als wichtigstes Werkzeug für Wahrscheinlichkeiten. In der vorliegenden Studie wurden keine motivationale Variablen der Schülerinnen und Schüler erfasst. Dennoch konnte in den Klassen, in welchen die Intervention stattfand, ein hohes Maß an Motivation, Begeisterung und Interesse für die Inhalte der Lerneinheit festgestellt werden. Verantwortlich dafür waren vermutlich zum größten Teil die Zufallsexperimente, die im Klassenverband oder in Partnerarbeit durchgeführt wurden. Erstaunlich waren trotz erwarteter und auch festgestellter Fehlvorstellungen die bereits vorhandenen Intuitionen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit. Dies sollte vor allem für den Mathematikunterricht der Grundschule als Chance gesehen werden, stochastische Themen früh spielerisch und anhand geeigneter Darstellungsformate zu behandeln. Die oftmals als abstrakt erlebte Sekundarstufenstochastik kann dadurch leichter durchdrungen werden, da sie automatisch mit den erlebten stochastischen Phänomenen vernetzt wird.

Infoboxen

Einleitende Informationen zur Studie

Im vorliegenden Beitrag liegt der Fokus auf dem Vorwissen zum Proportionsbegriff und wie sich dieser durch die Intervention entwickelt. Befragt wurden dazu insgesamt 244 Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen 8 und 12 Jahren. Diese kamen aus 12 Klassen aus insgesamt 6 Grundschulen im Großraum Stuttgart. Alle Kinder besuchten zur Zeit des Erhebungszeitraums die 4. Klasse. Die Intervention dauerte 4 Schulstunden und erfolgte an vier Schultagen. Vor, nach und drei Monate nach der Intervention mussten die Schülerinnen und Schüler einen 35-minütigen Test bearbeiten, der Items zu allen im Unterricht behandelte Themen enthielt. Die Analyse für den vorliegenden Beitrag bezieht lediglich die Items zum Proportionsbegriff ein. Daraus wurde zu allen drei Testzeitpunkten für alle Schülerinnen und Schüler ein Summenscore berechnet, anhand dessen ein Leistungszuwachs beim proportionalen Denken aus der Experimentalgruppe festgestellt werden sollte. Dieser quantitative Ansatz wurde durch einen qualitativen Blick auf die von den Kindern verwendeten Strategien beim Proportionsvergleich ergänzt.

Implikationen für die Praxis

Die Ergebnisse der Studie deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen 8 und 12 Jahren für ihr Alter typische Fehlvorstellungen bezüglich des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (Bsp.: „Es wurde 5x hintereinander ein roter Steckwürfel gezogen – der nächste Würfel ist ganz bestimmt blau.“) besitzen. Ebenso zeigen die Kinder typische fehlerhafte Strategien beim Proportionsvergleich (Ausblenden einer Größe beim Betrachten eines Verhältnisses oder additive statt multiplikative Strategien). Die Wirksamkeit der Intervention kann als Anlass gesehen werden, die übliche Unterrichtspraxis in der Grundschule durch ein für die Kinder sehr spannendes Themenfeld zu erweitern. Gute Intuitionen der Kinder helfen dabei, stochastische Problemstellungen zu durchdringen; diese erste Begegnung mit einer „Mathematik der Unsicherheit“ schafft eine gute Grundlage für die spätere formale Auseinandersetzung mit der Stochastik in der Sekundarstufe. Analog verhält es sich mit dem Proportionsbegriff. Die frühe Begegnung mit Verhältnissen und relativen Häufigkeiten kann sich positiv auf das Erlernen des Bruchzahl- und Prozentbegriffs in den ersten Jahren der Sekundarstufe auswirken. Dazu kommt, dass Kinder früh ein erstes Verständnis für verschiedene stochastische Konzepte spielerisch erlangen (Erwartungswert, bedingte Wahrscheinlichkeit).

Forschungsmethoden

Die Schülerinnen und Schüler aus beiden Versuchsbedingungen hatten zum Vortestzeitpunkt ein vergleichbares Wissen zu den in der Intervention geförderten Inhalten. Normalerweise wird dies durch eine zufällige Zuteilung der teilnehmenden Schulklassen zu den Versuchsbedingungen (Randomisierung) gewährleistet (Ziel: mit großer Wahrscheinlichkeit ausgeglichenes Verhältnis starker und schwacher Klassen in beiden Bedingungen). Dies ist deshalb von Bedeutung, da es sich beispielsweise für Gruppen mit hohem Ausgangsniveau (bereits im Vortest schneidet eine Klasse besonders gut ab) in aller Regel als schwieriger herausstellt, große Leistungssteigerungen zu erzielen als für Gruppen mit niedrigem Ausgangsniveau. Eine Randomisierung konnte aus diversen Gründen nicht realisiert werden. Das gleiche Ausgangsniveau von Experimental- und Kontrollgruppe wurde deshalb durch einen einfachen Mittelwertvergleich (T-Test) statistisch abgesichert.

Notwendig für den Erfolg der Intervention ist die Leistungssteigerung der Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe. Hinreichend für den Erfolg ist dann jedoch erst die Tatsache, dass diese Kinder sowohl im Nach- als auch im Follow-up Test signifikant höhere Ergebnisse erzielen als die vergleichbare Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe. Dafür wurde eine multiple Regressionsanalyse mit den unabhängigen Variablen Alter, Geschlecht, Mathematiknote, Vortestergebnis und Testbedingung (Experimental- oder Kontrollgruppe) gerechnet. Die abhängige Variable war jeweils das Ergebnis einer Schülerin / eines Schülers im Nachtest (Follow-up Test). Signifikante und damit gute Prädiktoren für die Vorhersage der Nachtest- und Follow-up Testergebnisse sind das Vorwissen (Vortestergebnis), allgemeine kognitive Fähigkeiten (Mathematiknote) und die Testbedingung. Die Stärke der Prädiktoren wird in der Regression jeweils durch das β-Gewicht ausgedrückt. Wird es signifikant, trägt es mit großer Wahrscheinlichkeit zur Vorhersage bei; je größer es ist, desto stärker ist die Vorhersagekraft (hier: $\beta_{\text{Vorwissen}} > \beta_{\text{kognitive Fähigkeiten}} > \beta_{\text{Testbedingung}}$.

Das Alter und das Geschlecht haben keine Vorhersagekraft. Die Stärke jedes im Modell signifikanten Prädiktors wird durch die anderen Prädiktoren „kontrolliert“. Dadurch ergeben sich bereinigte Effekte, die eine bessere Interpretierbarkeit von Wirkungszusammenhängen ermöglichen. Der signifikante Prädiktor „Versuchsbedingung“ unter Kontrolle der anderen beiden Prädiktoren lässt sich wie folgt illustrieren: Zwei Schüler/innen, die in allen Variablen übereinstimmen (gleiche Mathematiknote, gleiches Vorwissen) erzielen signifikant unterschiedliche Testergebnisse, wenn eine Schülerin/ein Schüler aus der Kontroll- und der andere aus der Experimentalgruppe stammt. Bei Leistungsmessungen innerhalb von Interventionsstudien, in welchen nicht unterschiedliche Formen des Unterrichtens miteinander verglichen werden, sondern eine Form des Unterrichts mit einer Kontrollgruppe (welche nicht trainiert wird), wird häufig die Kritik des „teaching to the test“ geäußert. Die in den Tests abgefragten Inhalte beziehen sich zwar auf die im Unterricht geförderten Kompetenzen, jedoch wurden diese meist in textbasierter und numerischer Form abgefragt. Der Unterricht hingegen war gekennzeichnet durch ein hohes Maß an spielerischer Auseinandersetzung mit Steckwürfeln und Piktogrammen. Es wurde also eine Art Übersetzung als Transferleistung benötigt.

Deklaration von Interessenkonflikten

Christoph Till ist Mitglied des Kooperativen Promotionskollegs „Effektive Lehr-Lernarrangements“ der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg und der Universität Tübingen, das vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg gefördert wird. Der Autor erklärt, dass kein Interessenskonflikt besteht.

Anhang

- Keine Begründung angegeben
- Ausblenden einer Größe (eindimensionaler Vergleich):
  - Lena hat 10 kaputte und Max 20 kaputte Blumen.
    Die Gefahr ist bei Lena kleiner. (Fokus beschädigte Objekte)
  - Lena hat 10 unbeschädigte und Max 80 unbeschädigte Blumen.
    Die Gefahr ist bei Max kleiner. (Fokus unbeschädigte Objekte)
- Korrekte multiplikative Strategien (zweidimensionaler Vergleich)
  - Bei Lena ist die Hälfte der Blumen kaputt gegangen,
    bei Max weniger als die Hälfte. Die Gefahr ist bei Max kleiner.
  - Wenn Lena auch 100 Blumen hätte, dann würden bei ihr
    50 Blumen kaputt gehen. Das wären dann mehr als bei Max.

Abbildung 5.22: Strategien beim Vergleich relativer Häufigkeiten

Literatur

Barzel, B., & Kleine, M. (2013). Verhältnisse. Ein Thema quer durch die Schulmathematik. *Mathematiklehren*, *179*, 2–8.

Brase, G. L. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. Retrieved from http://www.k-state.edu/psych/research/documents/2009ACP.pdf

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozess der Erziehung.* Berlin: Berlin-Verlag.

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). Children's understanding of probability. a literature review (full report). Retrieved from http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? Stochastische Vorstellungen entwickeln. *PM – Praxis der Mathematik*, *47*(4), 1–7.

Cadez, T. H., & Skrbec, M. (2011). Understanding the concepts in probability of pre-school and early school children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *7*(4), 263–279.

Denes-Raj, V., & Epstein, S. (1994). Conflict between intuitive and rational processing. when people behave against their better judgment. *Journal of Personality and Social Psychology*, *66*(5), 819–829.

Denison, S., & Xu, F. (2013). The origins of probabilistic inference in human infants. *Cognition*, *130*(3), 335–347.

Falk, R., & Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: adjusting probabilities. *Developmental Psychology*, *34*(6), 1340–1357.

Falk, R., Yudilevich-Assouline, P., & Elstein, A. (2012). Children's concept of probability as inferred from their binary choices – revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(2), 207–233.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory research. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1–24.

Gaissmaier, W., Wegwarth, O., Skopec, D., Müller, A.-S., Broschinski, S., & Politi, M. C. (2012). Numbers can be worth a thousand pictures: individual differences in understanding graphical and numerical representations of health-related information. *Health Psychology*, *31*(3), 286–296.

Gal, I., & Garfield, J. B. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal, & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1–13). Amsterdam: IOS Press.

Galesic, M., & Garcia-Retamero, R. (2010). Statistical numeracy for health. A cross-cultural comparison with probabilistic national samples. *Archives of Internal Medicine*, *170*(5), 462–465.

Garcia-Retamero, R., Galesic, M., & Gigerenzer, G. (2010). Do icon arrays help reduce denominator neglect? *Medical Decision Making*, *30*(6), 672–684.

Gigerenzer, G. (2013). *Risiko. Wie man die richtigen Entscheidungen trifft.* München: Bertelsmann Verlag.

Gigerenzer, G., Gaissmaier, W., Kurz-Milcke, E., Schwartz, L. M., & Woloshin, S. (2008). Helping doctors and patients make sense of health statistics. *Association for Psychlogical Science*, *8*(2), 53–96.

Gigerenzer, G., & Gray, M. (2011). *Better patients, better doctors, better decisions: envisioning health care 2020.* Cambridge: MIT Press.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychologycal Review*, *102*(4), 684–704.

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S., & Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not. *Cognition*, *84*, 343–352.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow.* New York: Farrar, Straus and Giroux.

Kapadia, R. (2009). Chance encounters – 20 years later. Fundamental ideas in teaching probability at school level. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 371–386.

Koerber, S. (2003). *Visualisierung als Werkzeug im Mathematik-Unterricht. Der Einfluss externer Repräsentationsformen auf proportionales Denken im Grundschulalter* (Dissertationsschrift, Hamburg).

Martignon, L., & Krauss, S. (2007). Gezinkte und ungezinkte Würfel, Magnetplättchen und Tinkercubes: Materialien für eine Grundschulstochastik zum Anfassen. *Stochastik in der Schule*, *27*(3), 16–28.

Martignon, L., & Krauss, S. (2009). Hands-on activities for fourth graders: a tool box for decision-making and reckoning with risk. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 227–258.

Moore, C. F., Dixon, J. A., & Haines, B. A. (1991). Components of understanding in proportional reasoning: a fuzzy set representation of developmental progressions. *Child Development*, *62*, 441–459.

Neubert, B. (2012). *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit: Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* New York: Norton.

Pisa Konsortium. (2004). *Pisa 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland. Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Waxmann. Münster.

Sedlmeier, P. (2001). Statistik ohne Formeln. In M. Borovcnik, J. Engel, & D. Wickmann (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht: die NCTM-Standards 2000; Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich* (S. 83–95). Berlin: Verlag Franzbecker.

Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M., & Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. In *Proceedings of the 28th international conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 177–184). Bergen.

Spiegelhalter, D., Pearson, M., & Short, I. (2011). Visualizing uncertainty about the future. *Science*, *333*, 1393–1400.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. In *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 169–176). Prague.

Till, C. (2014). Fostering risk literacy in elementary school. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *9*(2), 85–98.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen* (Dissertationsschrift, Hildesheim).

Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve bayesian problems: the role of representation in mental computation. *Cognition*, *98*, 287–308.

5.3 Artikel 3

Frequency formats: how primary school stochastics profits from cognitive psychology

Christoph Till

PH Ludwigsburg University of Education

Abstract

We know from cognitive psychology that understanding numerical information is deeply related to the format in which the information is presented – percentages are hard to grasp whereas frequency formats are felt as *intuitive*. This plays a vital role in the medical domain where difficult risk-related probability judgments have to be made both by professionals and their patients. We show that the idea of representing statistical information in terms of frequency formats is not only helpful for communicating risks, but also can be applied for primary school stochastics where percentages and fractions are not available yet. I report from a one-week-intervention study which was conducted in grade 4 in primary school. I will show how the students profited by the different representations in form of colored tinker-cubes, icon arrays and natural frequencies which they used to describe and quantify probabilities and frequencies. In this article I focus on conditional proportions and Bayesian reasoning which had been one part of the intervention. I also report from future teachers' attitudes towards such an approach. The findings show that they are willing to bring the presented ideas in their own classrooms.

Keywords: Probability judgments, Natural frequencies, Bayesian reasoning, Representations, Conditional probability

Introduction

> Why do people find probability and statistics unintuitive and difficult? I've been working in this area for around 35 years, and after all this time I have finally arrived at an answer. Because probability and statistics are unintuitive and difficult. (p. 1) (Spiegelhalter & Gage, 2014)

The core idea of my paper is that probability and statistics are not unintuitive and difficult, but the way stochastic concepts and contents are communicated and represented is often unintuitive and difficult. The way statistical or numerical information is communicated is deeply related to the processes of the human mind and its mechanisms (Hoffrage et al., 2002; Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Sedlmeier, 2001; Spiegelhalter et al., 2011). During the last 50 years, there have been disputes between advocates of the heuristics-and-biases tradition and evolutionary psychologists about humans' capabilities concerning reasoning and judgments under uncertainty (Samuels, Stich, & Bishop, 2002). The hot-button issue was the following question: "Are humans 'uniformly probability-blind' (Piattelli-Palmarini, 1994) or do they have indeed a form of instinct of probability" (Pinker, 1997)? This story has been told and retold many times in books and journals on cognition, but I feel compelled to re-tell it here briefly once again. Those proponents with a pessimistic mindset come primarily from the ranks of the heuristics-and-biases program. Piattelli-Palmarini (1994), Bazerman and Neale (1986) and Gould (1992) state that when it comes to reasoning and judgments under uncertainty, humans are some kind of "probability-blind". In their eyes the humans' incapacities regarding probability-related judgments are due to one main reason: the human mind is "not built to work by the rules of probability" (Gould, 1992). As a result people's choice behavior will always deviate from normative appropriate judgments (Samuels et al., 2002). One of the most popular proponents and founder of the heuristics-and-biases program is Daniel Kahneman. In his opinion there is little hope of eliminating wrong intuitions and biases in probabilistic thinking through instruction (Kahneman, 2011).

A range of evolutionary psychologists occupy an opposite position. Out of their perspective probabilistic phenomena are too pervasive in nature, for humans to lack a sense of them (Pinker, 1997). In their eyes the reasons for the difficulties mentioned above hark back to "unnatural" formats in which probabilities are communicated (Gigerenzer, 1991). Information should be presented in a way people naturally think (Pinker, 1997). As a consequence cognitive illusions may just disappear (Gigerenzer, 1991). Some of the disputes between advocates of the heuristics-and-biases program and the evolutionary psychologists have to be seen as rhetoric exaggerations perhaps, since they were not necessarily conflicts between sharply divergent fronts. Recently, much has been written about these exaggerations in the "rationality wars" (Samuels et al., 2002). As a result of those wars a much more humble vision of rationality has emerged: it is the vision of an ecological rationality, i.e., that of the mind which adapts to an environment and profits from some features, while being maladaptive with others. In this vision of rationality probabilistic thinking is also reducible to a much more humble way of reasoning about uncertainty, namely a reasoning by means of natural frequencies.

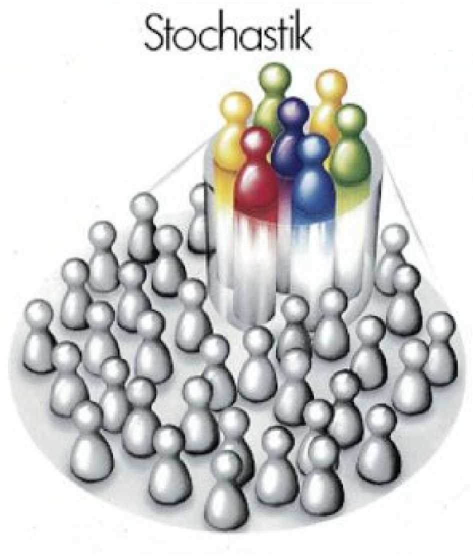


Figure 5.23: Natural sampling: cover image of a German schoolbook for upper secondary level mathematics

Natural Frequencies

In fact, natural frequencies were thought by Gigerenzer and Hoffrage (1995) as the result of *natural sampling* in a well contoured environment. This can be vividly imagined as a natural movement we all perform when we extract two apples from a basket with ten apples, or a certain token from a larger set of them (Figure 5.23). Hoffrage et al. (2002) argue that natural sampling and therefore natural frequencies have come to its supremacy since this is the way "humans have encountered statistical information during their history".

The best way to show the specific nature of natural frequencies is to contrast them to numerical expressions via percentages. For instance, when we are interested in the proportion of colored tokens from the image above we either say *7 out of each 40* are colored (natural frequencies) or we say 17.5 % tokens are colored (relative frequency) (Figure 5.23 from Diepgen, Kuypers, and Karlheinz (1993)). Both expressions are equivalent, though one is adapted to the human mind because of the natural movement we associate with this expression. We can directly obverse and count the proportion of colored tokens (Hoffrage et al., 2002).

Expressions in terms of percentages are more difficult to grasp because of the normalization to *100*. As a consequence of the normalization the information of the base rates disappears. Some people might say that expressions via natural frequencies is not an exact mathematical expression for a proportion. 17.5 % is a percentage which is a very general proportion whereas *7 out of each 40* is a numerical example of this proportion. A strong argument against this claim is that *7 out of 40* is indeed a general proportion when we think of it as an expected value. For instance, this expected value can easily be interpreted as the mean proportion of the following: *5 out of 40*, *9 out of 40*, *6 out of 40*, *7 out of 40* and *8 out of 40*.

Natural frequencies are not only easy to handle when we describe proportions, they also serve well for describing conditional probabilities. Instead of normalizing we just put the relation of the compounded elements to the elements in the subgroup. For the example above the conditional probability "P (green token | colored tokens)" can be described as *2 green out of each 7* colored tokens which is less difficult to interpret compared to the proportion of 29 % (2/7). The natural movement can be seen again at the beginning when we extract the colored tokens out of the large set of all tokens and then when we take the two green tokens out of the small set of colored tokens.

I have shown that according to theoretical perspective natural frequencies are superior compared to percentages because they are better processed by the human mind. As a consequence probability-related information, i.e. in the medical domain, should more often be expressed in terms of natural frequencies instead of percentages. In the next paragraph I will show that using natural frequencies leads to better performances when people have to make probability-related judgments.

Percentages versus Natural Frequencies

In chapter 18 of the first of three books with the title "Heuristics and Biases" by Daniel Kahneman, Paul Slovic and Amos Tversky, David M. Eddy stressed that medical doctors do not follow Bayes' formula when solving the following task (Eddy, 1982):

> The probability that a woman at age 40 has breast cancer (B) is 1% (P(B) = prevalence = 1%). According to the literature, the probability that the disease is detected by a mammography (M) is 80% (P(M+|B) = sensitivity = 80%). The probability that the test misdetects the disease although the patient does not have it is 9.6% (P(M+|¬ B) = 1 - specificity = 9.6%). If a woman at age 40 is tested as positive, what is the probability that she indeed has breast cancer P(B|M+)?
>
> Bayes' formula yields the following result:

$$P(B|M+) = \frac{P(M+|B) \cdot P(B)}{P(M+|B) \cdot P(B) + P(M+|\neg B) \cdot P(\neg B)} = \frac{.8 \cdot .01}{.8 \cdot .01 + .096 \cdot .99} = 7.8\% \qquad (5.1)$$

Figure 5.24: Bayes formula with conditional probabilities

Thus, the probability of breast cancer is only 7.8 %, while Eddy reports that 95 out of 100 doctors estimated this probability to be between 70 % and 80 %. Gigerenzer and Hoffrage (1995) focused on another aspect of the problem: the representation of uncertainty. In Eddy's task, quantitative information was given in probabilities. Gigerenzer and Hoffrage presented Eddy's problem to medical doctors replacing probabilities with a different representation of uncertainty, namely natural frequencies. In their formulation the task was:

> *100 out of every 10000* women at age 40 who participate in routine screening have breast cancer. *80 of every 100* women with breast cancer will get a positive mammography. *950 out of every 9900* women without breast cancer will also get a positive mammography. Here is a new representative sample of women at age forty who get a positive mammography in routine screening. How many of these women do you expect to actually have breast cancer?

$$P(B|M+) = \frac{80\ (cancer\ \&\ T+)}{80\ (cancer\ \&\ T+) + 950\ (no\ cancer\ \&\ T+)} = \frac{80}{1030} = 80\ out\ of\ 1030\ (7.8\%) \tag{5.2}$$

Figure 5.25: Bayes formula with natural frequencies

Now nearly half (46 %) of all doctors gave the Bayesian answer: 80 out of 1030 (7.8 %). This study was one of the first and several other came along that showed the same positive effects of representing the information in terms of natural frequencies instead of percentages (Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Girotto & Gonzalez, 2001; Macchi, 1995). The main advantage of natural frequencies in Bayesian reasoning tasks is that they do part of the computation and reduce the cognitive load (Sedlmeier, 2001).

In a survey about how medical doctors communicate risk, Spiegelhalter asked the following question: "If you had to tell a person that around 20 % of cases with their condition would suffer a certain bad outcome within 10 years, which of the following terms would you use?" (Spiegelhalter & Gage, 2014). Most of the medical doctors preferred option 4, which fortunately turns out to be the one supported by psychological research.

- 20 % chance
- 0.2 probability
- 1 in 5 chance
- **20 out of 100 cases like you**
- None of the above
- Wouldn't use numbers
- Depends on person

Based on the very intuitive character of natural frequencies the idea was to bring them into primary school where percentages, ratios and fractions do not play a role (in Germany).

Bayesian reasoning in primary school

Primary school stochastics is most of the time based on descriptive statistics ("How do you get to school?") and simple random experiments with dice and spinners ("Is it more likely to get a number between 1 and 2 or a number between 3 and 6?"). There is a strong focus on qualitative probability judgments and basic quantitative probability comparisons (Kapadia, 2009). That is a pity since there are well-designed studies with children in primary school that show children are able to do more profound stochastics. Lindmeier and Reiss (2014), for example, showed that children aged 9-12 can acquire fist elementary competencies regarding inferential statistics.

Like Lindmeier and Reiss, I promote teaching statistical concepts that go a bit further. For instance, young students in primary school are able to grasp an elementary form of conditional probabilities and Bayesian reasoning if these concepts are introduced via natural frequencies (Latten et al., 2011; Martignon & Kurz-Milcke, 2006b; Martignon & Krauss, 2009). In this case, it is more about catching the "statistical or probabilistic phenomenon" instead of working out Bayes formula. The purpose of these studies is to show that the early encounter with data and chance initiates probabilistic and statistical thinking (Bruner, 1966; Saldanha & Liu, 2014). There are findings that students from secondary school experience difficulties when they are confronted with these concepts (Huerta, 2009; Wassner, 2004; Sedlmeier & Gigerenzer, 2001). Often the students have a formal understanding of probabilities: they master the techniques but do not catch the underlying phenomenon (Diaz & Fuente, 2007). I will show how the use of natural expressions facilitates an elementary form of Bayesian reasoning.

The essence of Bayesian reasoning is that prior knowledge about a certain category is updated by information about a special feature (symptom, test) that may be more or less characteristic of the category. Although it is not only students who have problems with these concepts (Wassner, 2004). Also medical doctors and lawyers often do not really understand why the "probability of A, given B" and the "probability of B, given A" are different probabilities (Gigerenzer et al., 2008). The results of Eddy's study indicated that knowing about conditional probabilities helps to understand test results. Furthermore for many other scenarios in real life we deal with conditional probabilities and Bayesian problems without knowing it. Kahneman (2011) reports another example, in which people are making the wrong judgments. This fallacy can be explained by the representativeness heuristic:

> An individual has been described by a neighbor as follows: "Steve is very shy and withdrawn, invariably helpful but with very little interest in people or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has a need for order and structure, and a passion for detail." Is Steve more likely to be a librarian or a farmer? (p. 6)

Most people think that Steve is probably a librarian. However the right answer is that he is more likely to be a farmer. There are five times as many farmers as librarians in the United States and so the absolute number of shy and helpful farmers is larger than the absolute number of shy and helpful librarians. The most common mistake of people in these kind of examples is the base-rate neglect. This typical fallacy, as well as some others, disappear by using natural representation formats (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). I now translate this task into one for children and show how the combination of iconic representations and expressions via natural frequencies facilitates this Bayesian task.

Natural frequencies can be visualized by iconic representations. Iconic representation is based on analog visual representations (Kurz-Milcke et al., 2011). Many studies have been done which show the positive effects of visual representations for (probabilistic) problem-solving (Brase, 2008; Corter & Zahner, 2007; Gaissmaier et al., 2012; Garcia-Retamero et al., 2010). The big advantage is that when we look at an icon array we see all proportions of all features; this intuitive grasping of proportions happens by visual perception (Scholz & Waschescio, 1986). Research shows that children have difficulty solving proportional reasoning problems involving discrete units until 10 to 12 years of age. However there is evidence that parallel problems involving continuous quantities can be solved by 6 years of age (Boyer et al., 2008). The combination of natural frequencies and iconic representations is therefore well-suited for fostering elementary proportional reasoning since it combines continuous and discrete quantities.

In order to get an idea how Bayesian tasks for primary school can look like let us do the translation: librarians become princesses, farmers become mermaids and the attribute *shy* becomes *crown*. The example becomes: *5 out of each 60* people are princesses and *4 out of each 5* princesses wear a crown. *55 out of each 60* people are mermaids and *12 out of each 55* mermaids also wear a crown. If this information was to be combined with iconic representations, even children can solve this typical Bayesian reasoning task. In this example we would ask the following question: "Imagine you see someone wearing a crown. Is it more likely to be a princess or a mermaid?" The students just have to concentrate on the people wearing a crown and mask out all people with no crown on their heads. Then they compare the numbers by using natural frequencies: "*4 out of 16* people with crown are princesses. *12 out of 16* people with crown are mermaids. Therefore it is more likely to be a mermaid!" To sum it up. Almost every princess wears a crown (*4 out of 5*). But if you see someone with a crown it is more likely to be a mermaid. Understanding this correlation is the essence of Bayesian reasoning.

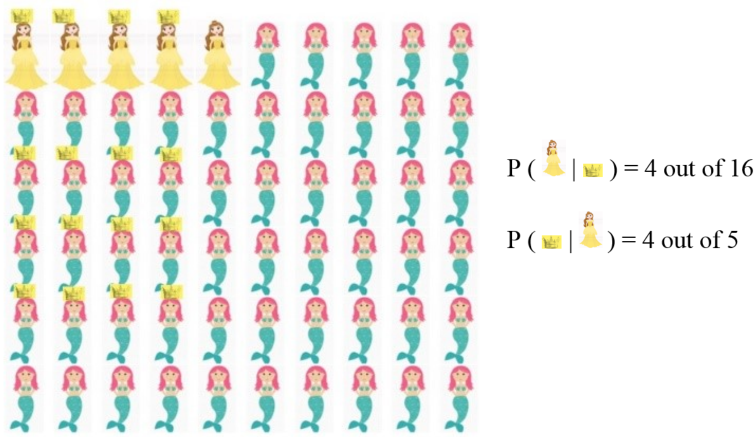


Figure 5.26: Iconic representation of a typical Bayesian task: icon array

This iconic representation helps the students to realize that there are indeed symptomatic characteristics for certain people (crown for princess); but you always have to bear in mind that "other people could also wear crowns".

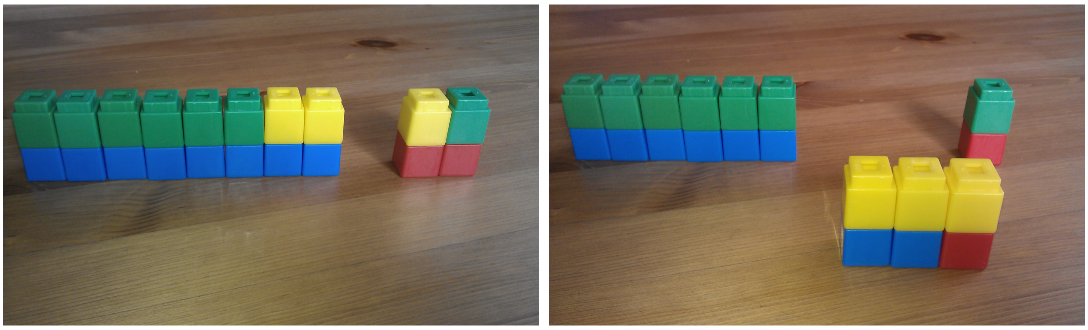


Figure 5.27: Enactive representation of a typical Bayesian task: tinker-cubes

The same Bayesian task can be modeled by the use of hands-on material in the form of colored tinker-cubes. Now there are only 2 princesses (red) and 8 mermaids (blue); one princess wears a crown (yellow) and two mermaids wear a crown. The other people wear no crowns (green). The base rate of princess is *2 out of 10* (prior probability) and changes to *1 out of 3* (posterior probability) in the light of new evidence.

Previous research

There is much research in different scientific disciplines that show the positive effects of good representation formats. I will now focus on studies from mathematics and stochastics education. As mentioned before a few classroom experiments have been done. In this paragraph I will provide an overview of the different studies. In his study with 15 to 17-years-olds, Wassner (2004) compared two ways of teaching the Bayes formula: one with probabilities and one with natural frequencies. The students that worked with natural frequencies performed better than the students that worked with probabilities. Wassner reported also from long-term effects of the intervention.

Zhu and Gigerenzer were able to show some years later, that the success rate of children aged 9 to 11 in typical Bayesian tasks is quite high when the relevant information is presented in terms of frequencies (Zhu & Gigerenzer, 2006). The set of tasks consisted of ten problems, which the researchers presented in different ways. One group of children was given information as probabilities in percentage form and one group in the terms of natural frequencies. The students who had to work with the probabilities could not find any right solution at all; in contrast even the youngest students from the group that worked with natural frequencies at the age of 9 years solved 14 % of the tasks. The ten-year-olds solved 42 % and the 11-year-olds already 47 %. These findings confirm the hypothesis that also very young students can deal with conditional proportions or probabilities when natural frequencies are used. Statements about the learning effects cannot be made due to the design of this study. Though the results illustrate that young students in primary school understand first elements of Bayesian reasoning if the information is presented in natural frequencies.

In the class experiment "The dog ate my homework!" by Spiegelhalter and Gage (2014) students aged 14-16 had to model a Bayesian task in which they had to find out how likely it is that accused or not accused students are lying or telling the truth. In this class experiment the students also worked with colored tinker-cubes for encoding those binary variables, created 2x2 tables and empirical frequency trees. The proportions of students' attributes (lying/telling the truth and accused/not accused) were a result of throwing dice. This class experiment had indeed been a success, since the students could easily do probability calculations based on "expected frequencies". (This expression is used by the authors but can be seen as synonym for natural frequencies.)

Martignon and Krauss (2009) did an explorative study in which they introduced a tool-box for decision-making and reckoning with risk. This study took place in six classes in grade 4 of primary school. The students were confronted with a sequence of tasks that built on each other. Elements were elementary Bayesian reasoning, comparing proportions and risks. The authors state that these play-based activities were a success.

Different competencies in the area of statistical literacy were subject of the study RIKO-STAT (Kuntze et al., 2010). Students from primary school, secondary school and students from university had been assessed. Different concepts related to modeling risk were of interest. Some of the tasks for the primary school students were about first elements of expected values, risk reduction and comparisons of proportions. The students were also confronted with the Bayesian reasoning task. The students' performances (primary school and secondary school students, undergraduates) in this cross-sectional design were not satisfying. As a consequence the authors claim a further and earlier encouragement of statistical and probabilistic thinking. Nevertheless there was one important finding that has to be mentioned: students from primary school showed good performances concerning the Bayesian tasks. The analysis of the youngest students' strategies showed that they intuitively used a frequency approach via natural frequencies. The solution rates are satisfying whereas the secondary school students did not perform well. The authors assume that they would have performed better by applying frequencies instead of percentages.

Based on RIKO-STAT, some researchers from Ludwigsburg University of Education and cognitive psychologists from the Harding Center for Risk Literacy in Berlin conducted a pilot study on *risk* in primary school (Latten et al., 2011). In this intervention study (6 lessons) the students were confronted with first elements of expected values, risk reduction, conditional probabilities and comparisons of proportions. The results show increased performances through the intervention.

Martignon and Kurz-Milcke (2006b) conducted an experiment and let children aged 8-10 construct stochastic situations via tinker-cubes and stochastic urns. The aim was to foster the development of a dynamic mental imagery for representing stochastic situations. The experiment consisted of a so called "urn arithmetic" in which first elements of expanding proportions were fostered. They also talked about the typical Bayesian task and modeled the situation with a "we-urn". All students in class were represented by tinker towers which were thrown in a big box. After that the towers were categorized in a tree-diagram. This was followed by bets like: "I have blue cube (boy) behind my back. Do you think he is likely to be a math enthusiast?" There was no testing in this experiment.

To sum it up there is lot of research that shows it is possible to teach elementary Bayesian reasoning already in primary school and related stochastic concepts. The The common ground of these studies is the use of natural representations of statistical information. The idea of my study is to strengthen these findings by choosing a more sophisticated experimental design.

Research questions

My research questions are divided into two sections. The first section deals with the students' preknowledge and the incremental knowledge after a learning unit of the concepts discussed above. The second learning unit is about teachers' attitudes towards these concepts:

- Are students in grade 4 able to solve conditional probability and Bayesian reasoning tasks when the information is given in terms of natural frequencies?
- How does a brief intervention effect the answers to conditional probability and Bayesian reasoning tasks?
- Are future teachers willing to teach these contents in their own math lessons?

Study I

Method

Sample 244 4th-grade students from twelve classes took part in the study. The students came from six different schools in and around Ludwigsburg, a city in the south of Germany. The study included 131 girls and 113 boys between the ages of 8 and 12 (M = 9.5, SD = .61). The study was carried out from December 2012 to July 2013. As Conditional probability and Bayesian reasoning are usually taught earliest in grade 10 or 11, the students had no previous experience with these topics. In each of the classes there had been around 20 students.

Design To find out if a student had previous knowledge or had gained knowledge on the subject, a pre-, post-, follow-up test design with treatment and control group was chosen. Every student out of the whole sample had to do the tests; however, only those students from the treatment group attended the learning unit. Students from control classes attended unspecific math lessons. Pre- and posttest were conducted before and after the intervention, and the follow-up test was conducted three months after the posttest. A multiple regression was chosen to detect the effect of the intervention. I also collected information about the students' age, gender and their grades in mathematics in order to control for these variables in the regression.

The effect sizes and the power of the test instrument were large. ($R^2 = .20, F_{222} = 2.65, f^2 = .35, 1 - \beta = 1.00$).

Intervention The ideas for the intervention arose from different classroom experiments and studies which had been conducted in Ludwigsburg and Berlin (Latten et al., 2011; Martignon & Kurz-Milcke, 2006b; Martignon & Krauss, 2009). The intervention lasted one hour, in which the students were confronted with a typical Bayesian task. This lesson was part of a whole learning unit about *risk and decisions under uncertainty*, in which also first elements of expected values, proportional reasoning, relative and absolute risks were fostered (Till, 2014). For this article I just report from one lesson and the analysis is only about the Bayesian tasks. In the lesson we discussed the following task which is related to the medical test problem. The similarity becomes obvious when we think of gender as people having a disease or not and the long and short hair as negative and positive test result.

> In a school yard there are 2 girls – one with long hair and one with short hair. There are also 8 boys – 2 with long hair and 6 with short hair. Assuming I tell you I talked with one of these children and the child had long hair. Would you bet it was a girl?

Before discussing the answer to the posed question, the students had to describe the distribution of the features in the two groups mentioned above. In the task mentioned above, the students were unknowingly introduced into quantifications via natural frequencies. *2 out of 10* children are girls; *1 out of 2* girls have long hair. Like the shy and helpful characteristic was more typical for the farmer, here the characteristic long hair is more typical for a girl. Now the students used colored tinker-cubes to encode the features *boy*, *girl*, *long hair* and *short hair* and modeled the situation. By adjoining cubes on top of each other, students were able to represent compounded features (i.e. long-haired boy). After modeling the Bayesian task with tinker-cubes the children did a little role play with the situation.

Instrument There are no standardized tests about students' understanding of conditional probabilities and Bayesian reasoning (Diaz & Fuente, 2007). The items in the test are patterned on the items of the Gigerenzer and Zhu study (2006). The problem structure is the same as the medical test problem (Cosmides & Tooby, 1996; Eddy, 1982). For the posttest and the follow-up test, new items of the same structure but different cover stories were compiled. That is to say that I had two items each for the pretest, the posttest and the follow-up test. The item pool consisted of two tasks. Either the students had to mark the right answer, fill in the blanks with their answers or had to give an explanation for their answers. Example items can be seen in Appendix.

Putting the first item and the second item together, I get the internal consistency of $\alpha_{\text{pretest}} = .54$, $\alpha_{\text{posttest}} = .75$ and $\alpha_{\text{follow-up test}} = .73$. Among those tasks the test included also elementary comparisons of probabilities, proportions and frequencies, trade-offs as first elements for expected values and risk reductions. I do not report here about the analysis of these results (for more information see Till (2014)).

Results

Before the intervention started the average test score of all participants was 2.98 (SD = 1.49) out of 6 points. The students from the control group had higher pretest scores compared to the students from the treatment group ($M_{treatment} = 2.8$, SD = 1.48; $M_{control} = 3.2$, SD = 1.44; $t(242) = 2.11$, $p = .036$; Table 5.5). (When I speak of pretest, posttest and follow-up test scores, I refer to the items about Bayesian reasoning.)

After the intervention, the students from the treatment group could out-perform the students from the control group. After three month they had still higher follow-up test results.

Table 5.5: Average test scores from treatment and control group

	Pretest	Posttest	Follow-up test
Treatment	2.8 (SD=1.48)	4.2 (SD=1.86)	3.8 (SD=1.88)
Control	3.2 (SD=1.44)	3.8 (SD=1.74)	3.6 (SD=1.86)

The students from the treatment group achieved an average score of 2.8 out of 6 points in the pretest (control group 3.2 out of 6 points). The students that were part of the intervention achieved an average score of 4.2 in the posttest (control group 3.8). Three months after the intervention, the students from the treatment group achieved still an average score of 3.8 (control group 3.6).

In order to get more information about the variables responsible for the achieved test results a multiple regression was done. Two models were computed. In the first model the predictors *pretest Bayes score* and *Grades in Mathematics* explained 18 % of the variance of the posttest Bayes score (follow-up test: 26 %). It follows from this that the students that are good at mathematics and students who achieve already a high pretest score probably will get a high posttest score. The same interrelationship applies for the prediction of the follow-up test result.

For the second model the additional predictor *test condition* (dummy-coded with *0* and *1*) explained additional 2 % variance. That is to say all in all 20 % (18 % + 2 %; follow-up: 27 %) of the posttest results can be explained by the three predictors pretest score, grade in mathematics and test condition. The fact that the predictor *test condition* had a significant β -weight of .17 ($p < .01$) indicates the effect of the short treatment.

Table 5.6: Prediction of the posttest results of the Bayesian tasks

	Predictor	***B***	***SE B***	β
Step 1	Pretest Bayes tasks	.31	.08	.25***
	Grades in Mathematics	-.54	.13	-.27***
Step 2	Pretest Bayes tasks	.36	.08	.27***
	Grades in Mathematics	-.55	.13	-.28***
	Test condition	.65	.23	.17**

Note. adj. $R^2 = .18$ for Step 1, $\Delta R^2 = .03$** for Step 2 † p<.1. * p<.05. ** p<.01. *** p<.001.

Discussion

The first – and most important – result is the high average pretest score of all students. Even without a confrontation with Bayesian text problems most of the students could solve half of the maximum of the obtainable score. This is to be estimated even higher when we think about the difficulties of adults (medical doctors, lawyers) with such tasks. The largest impact on the students' performances might be the task's representation format. In each task a given set of persons with certain attributes had to be counted and absolute numbers had to be compared. This very natural handling or sampling with objects corresponds to the cognitive mechanism of the human mind. That is the reason why young children can intuitively solve such problems. The results go along with findings from Zhu and Gigerenzer (2006). The students increased their performances through the intervention and even after three months students from the treatment group achieved even better follow-up test results.

The absolute differences of average scores of posttest and follow-up test were not that large. The reason for this is that the maximum score to be obtained was only 6 points. The other reason is the fact that the intervention lasted only one lesson. In this very short period of time great leaps are not to be expected. Nevertheless these results allow us to be very optimistic, as students are able to solve Bayesian text problems and improve their performances with an accessible representation format. A possible fault in my study is the missing random assignment of the classes to the different test conditions. This proceeding normally insures against confounding and ensures equal starting conditions. As described above, treatment and control group had different average pretest scores. As a consequence I chose a multiple regression, in which I controlled for the variable pretest score.

Study II

Method

Sample 32 female and 8 male pre-service teachers were asked about their attitudes towards teaching probability and statistics in primary school. One focus was on conditional probability and Bayesian reasoning. All of the participants studied elementary school education and with mathematics as one of their subjects. Most of the participants were in the 6th semester; it normally takes 7-8 semesters to finish the degree.

Design and Questionnaire There was a 60 minute presentation about my study, which had taken place between December 2012 and July 2013. After the presentation the participants had 30 minutes to answer five open questions. The questions were about the possibilities and limits of teaching probability and statistics in primary school. I am focusing on two questions from this study which are the most appropriate for understanding its effectiveness. The first question was about when and where to begin learning probability and statistics. The idea was to provoke the participants. This happened by using a statement declaring it is too early for children ages 8-10 to learn stochastics. In the answers received, the amount of negative responses is an indicator of potential adopters.

The second question is asking whether the future teachers can see themselves teaching probability and statistics in primary school. This is very important because if they are not convinced that it makes sense to start early, all considerations about the approach of teaching stochastics in primary school become obsolete. Below the two questions are listed and in the next section I will show how the future teachers responded to these questions. (The answers were categorized only with three or more similar answers. From this, seven categories were found for each question.)

- Comment on the following statement: *"Before teaching probability and statistics in primary school, the students should learn how to calculate; therefore stochastics should begin in secondary school!"*
- Can you imagine teaching probability and statistics in primary school? If yes/no why?

Results

Most of the future teachers found good arguments against the statement commented on. Indeed some teachers (3) mentioned problems for teaching probability and statistics in primary school since there are time limits. Four teachers also stated that basic arithmetic skills should be fostered before stochastics.

They also argued (3) that on the one hand basic arithmetic skills are needed for probabilistic thinking, but on the other hand these skills are enhanced by the engagement with stochastics. Some participants (3) mentioned that the special approach through iconic and enactive material is well suited for primary school. Therefore one should not wait until secondary school to teach probability and statistics. In this context there is very common misbelief that stochastics is not suited for primary school. One of the main messages of my article is you do not need fractions and percentages to deal with probability. Most of the participants (6) argued against the statement by emphasizing the aspects of early stochastics "enhances mathematical-logical" thinking. Stochastics is also important to primary school because of its "reference to everyday life" (9).

38 out of 40 participants wrote that they can imagine teaching this special approach in their future school career. As arguments they mentioned "logical thinking" (3), "spiral curriculum from informal to formal stochastics" (3) and the very suitable approach through the characteristics: playful, hands-on and experimental-oriented (4). As another argument for trying the approach described here are "real-life applications" (4). The two main arguments were: the learning unit can be done in "a short period of time" (7). The largest category was that of "motivation and fun" (9). The participants said that they can imagine the students having fun by using their intuitions for solving and discussing probability-related tasks.

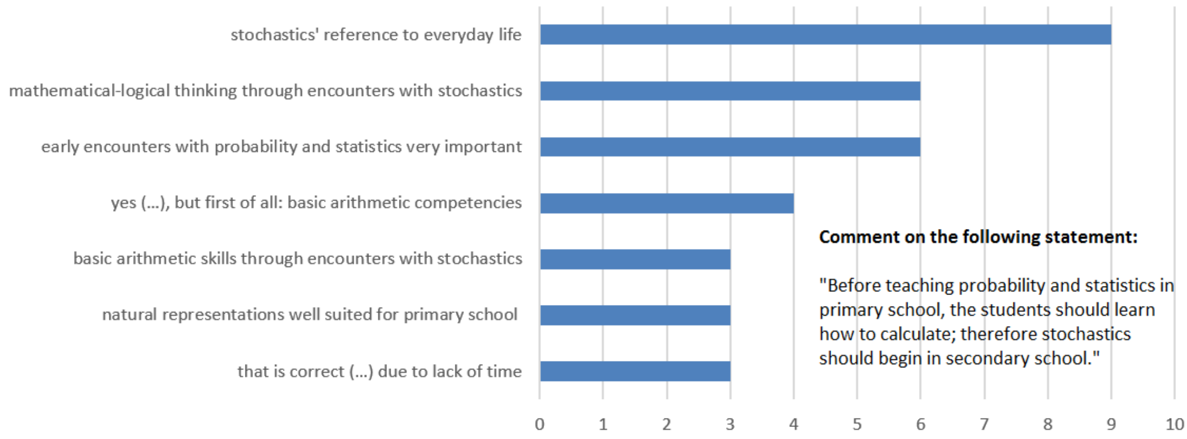


Figure 5.28: Future teachers' arguments against a hypothetical statement

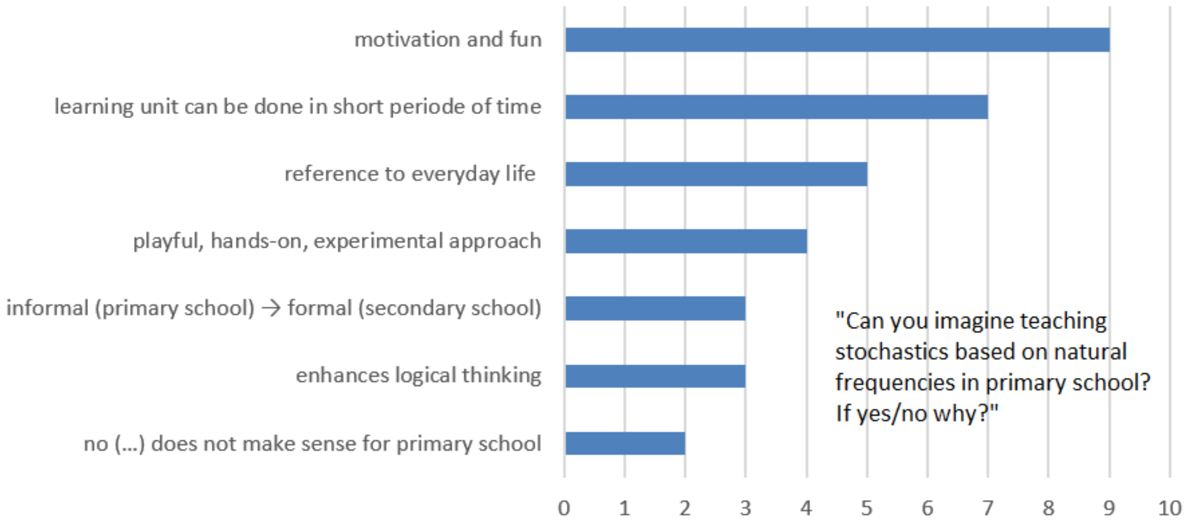


Figure 5.29: Future teachers' statements on teaching stochastics in primary school

Discussion

The aim was to find out how future teachers see those approaches that I introduced here. The main result was that there were very few reservations against teaching data and chance in primary school. Most of the participants found good arguments against the statement that stochastics is nothing for primary school but should start in secondary school. I also found out that almost every participant could imagine trying the introduced approach. This is a very important requirement: we do not have to convince the students that they should learn probability and statistics, we do have to express the importance of stochastics in order to convince the teachers! This survey should be seen as complementary support to study I. I intended to obtain a general picture of the future teachers' attitudes towards probability and statistics in primary school. In order to attend more profound information sophisticated surveys should be conducted.

General Discussion

The idea of this article was to introduce a representation format that facilitates probabilistic reasoning. The natural frequencies are easy to grasp since they are adapted to human cognitive mechanisms. I reported from studies in which participants profited by natural frequencies when they had to solve probability-related tasks. A special kind of probability task, the medical test problem, profits particularly from this natural representation format. The reason is that difficult conditional probabilities and their inversions become easy tasks if they are presented in terms of natural frequencies. If iconic representations are added, the tasks become even easier. This is the reason why it is well-suited for primary school classes.

I reported from a small part of an intervention study in grade 4 in which different probabilistic competencies were fostered (Study I), all under the fig-leaf of risk. I showed that natural frequencies can help students in grade 4 to solve Bayesian text problems. The students solved part of the items even before the intervention started. They even did better in the post-test and follow-up test. This goes along with finding from Zhu and Gigerenzer (2006) who showed that students can solve Bayesian problems, if those problems are presented in an adequate representation format.

The second important element of this article was the future teachers' attitudes towards teaching data and chance in primary school – especially teaching conditional probability and Bayesian reasoning with natural frequencies (Study II). The focus was on two questions of a survey in which the future teachers had to find arguments for the early encounter with probability and statistics in primary school. The second question was about the willingness of the teachers to bring the presented ideas into their own lessons. The fact that the participants found good arguments for the early encounter and were also ready to bring the ideas into classroom is an important requirement for the advancement of primary school stochastics. Good ideas only improve stochastics education if the teachers are ready to try those new ideas.

What are the consequences for teaching probability and statistics? Should we delete percentages and use only natural frequencies from now on? Of course not. Though we should think about how and when to introduce statistical concepts such as conditional probabilities and Bayesian reasoning. Due to the very intuitive character of natural frequencies I speak for an early playful and heuristic encounter with primary school stochastics. However natural frequencies also serve well for teaching the Bayes formula. Sedlmeier and Gigerenzer (2001) already showed that it is possible to teach it in "less than two hours".

Based on the findings of the small study with future teachers I can say that the introduced teaching approach is bound to meet with the teachers' attitudes. They see why it is important to begin early teaching probability and statistics and realized that the introduced natural representations are well-suited for primary school. *38 out of 40* future teachers said they want to bring the presented ideas in their own classrooms. This gives us a great perspective for the future.

Limitations

Even though the intervention had an effect on the students' conceptual understanding of conditional probabilities and Bayesian problems, there are some limitations which mostly have to do with the design of the study and the acquisition of participating classes. Firstly I compared students which were part of a training to those who had no training at all. Some researchers would state that these are "trivial effects". However there are two arguments against that: in case of feasibility studies when total new ideas and learning approaches are discussed, the comparison treatment to baseline control are justified. It is not that certain that students acquire skills through an intervention and answer tasks afterwards better than before. Another argument against the mentioned accuses of some researchers is the following: the intervention was based on hands-on material in form of tinker-cubes and icon arrays. Students were to grasp these concepts intuitively through visual perception. Sometimes natural frequencies were used to quantify proportions, probabilities and frequencies. In the tests, the students had to reason and give answers based only on natural frequencies. Therefore the possible complaint that I promulgate of "teaching to the test" does not really withstand.

Acknowledgements

The author is a member of the "Cooperative Research Training Group" of the University of Education, Ludwigsburg, and the University of Tübingen, which is supported by the Ministry of Science, Research and the Arts in Baden-Württemberg. Correspondence concerning this article should be addressed to Christoph Till, Department of Mathematics and Informatics, University of Education, Ludwigsburg, L 71634.

E-mail: Till@ph-ludwigsburg.de

Appendix

Appendix I: Questionnaire

- Did you learn probability and statistics in your school time? If yes, when?
- Comment on the following statement: *"Before teaching probability and statistics in primary school, the students should learn how to calculate; therefore stochastics should begin in secondary school."*
- What are the difficulties when teaching probability and statistics in primary school?
- Can you imagine teaching stochastics based on natural frequencies in primary school? If yes/no why?

Appendix II: Evaluation of assumptions (multiple regression analysis)

A few assumptions were checked in order to get reliable results in the multiple regression analysis. The Durbin-Watson test indicated that there is no autocorrelation between the independent variables (d=2.1). There were very only few outliers which had no impact on the regression (Mahalanobis Distance $_{\text{Max}}$ = 10.43; Cook Distance $_{\text{Max}}$ = .06). There was no violation of the normal distribution of the variables "grades in mathematics", "pretest score", "posttest score" and "follow-up test score". I checked it each for the treatment and the control group. The values for skewness and kurtosis were not remarkable since most of the values were below 1; skewness $_{\text{Max}}$ (follow-up test score treatment group = -1.22). The pre-analysis showed no multicollinearity between the independent variables:

- Regression 1: pretest posttest comparison: variance inflation factor $_{\text{Max}}$ = 1.15
- Regression 2: pretest follow-up test comparison: variance inflation factor $_{\text{Max}}$ = 1.16

Residuals of the prediction were homoscedastic. Cases with missing data were valued with zero points (student did not know the answer of an item). The variances of all variables were equal for students from the treatment and the control group. This was done with the Levene's test for variance-homogeneity:

- $F_{\text{grades in mathematics}}$ (1, 232) = .024, p = .88
- $F_{\text{pretest score}}$ (1, 242) = .005, p = .94
- $F_{\text{posttest score}}$ (1, 225) = .219, p = .14
- $F_{\text{follow-up test score}}$ (1, 226) = .007, p = .93

Appendix III: Multiple regression for the follow-up test results

Table 5.7: Prediction of the follow-up test results of the Bayesian tasks

	Predictor	***B***	***SE B***	**β**
Step 1	Pretest Bayes tasks	.39	.08	.30***
	Grades in Mathematics	-.64	.12	-.32***
Step 2	Pretest Bayes tasks	.40	.08	.31***
	Grades in Mathematics	-.65	.12	-.33***
	Test condition	.40	.23	.10†

Note. adj. $R^2 = .26$ for Step 1, $\Delta R^2 = .01$† for Step 2 † p<.1. * p<.05. ** p<.01. *** p<.001.

Appendix IV: Bayesian task I

In a small village there is a school with 60 children. 10 children come from the city and 50 children come from the small village. 8 out of the 10 children from the city have a mobile phone and 20 out of the 50 children from the village have one.

- Imagine you meet a student. Is it more likely to be a kid from the village or the city?
- From far away you see a student who is speaking on the phone. Is it more likely to be a student from the city or from the village?
- There are ________ students with a mobile phone.
- From these students ________ are from the city.

Appendix V: Bayesian task II

In a castle there live 10 women. 2 are princesses and 8 are fairies. 1 princess wears a crown and 2 fairies wear a crown. From far you see someone who wears a crown. It is (...)

- rather a princess
- rather a fairy
- you cannot say it.

because ________________.

Literatur

Bazerman, M., & Neale, M. (1986). Heuristics and negotiation. In H. Arkes, & K. Hammond (Eds.), *Judgment and decision making: an interdisciplinary reader* (pp. 311–321). Cambrdige: Cambridge University Press.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: where children go wrong. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1478–1490.

Brase, G. L. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. Retrieved from http://www.k-state.edu/psych/research/documents/2009ACP.pdf

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Belkapp Press.

Corter, J. E., & Zahner, D. C. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal*, *6*(1), 22–50.

Cosmides, L., & Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, *58*, 1–73.

Diaz, C., & Fuente, D. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 128–148.

Diepgen, R., Kuypers, W., & Karlheinz, R. (1993). *Mathematik Gymnasiale Oberstufe. Allgemeine Ausgabe / Stochastik: Grund- und Leistungskurs*. Berlin: Cornelsen Verlag.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 335–347). Cambridge: Cambridge University Press.

Gaissmaier, W., Wegwarth, O., Skopec, D., Müller, A.-S., Broschinski, S., & Politi, M. C. (2012). Numbers can be worth a thousand pictures: individual differences in understanding graphical and numerical representations of health-related information. *Health Psychology*, *31*(3), 286–296.

Garcia-Retamero, R., Galesic, M., & Gigerenzer, G. (2010). Do icon arrays help reduce denominator neglect? *Medical Decision Making*, *30*(6), 672–684.

Gigerenzer, G. (1991). How to make cognitive illusions disappear. beyond "heuristics and biases". *European Review of Social Psychology*, *2*, 83–115.

Gigerenzer, G., Gaissmaier, W., Kurz-Milcke, E., Schwartz, L. M., & Woloshin, S. (2008). Helping doctors and patients make sense of health statistics. *Association for Psychlogical Science*, *8*(2), 53–96.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychologycal Review*, *102*(4), 684–704.

Girotto, V., & Gonzalez, M. (2001). Solving probabilistic and statistical problems: a matter of information structure and question form. *Cognition*, *78*, 247–276.

Gould, S. (1992). *Bully for brontosaurus. Further reflections in natural history*. London: Penguin Books.

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S., & Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not. *Cognition*, *84*, 343–352.

Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research. Structures and contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 163–194.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York: Farrar, Straus and Giroux.

Kapadia, R. (2009). Chance encounters – 20 years later. Fundamental ideas in teaching probability at school level. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 371–386.

Kuntze, S., Gundlach, M., Engel, J., & Martignon, L. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – empirical research in the project 'RIKO-STAT'. In *Proceedings of the 8th international conference on teaching statistics (ICOTS8)*. Ljubljana.

Kurz-Milcke, E., Gigerenzer, G., & Martignon, L. (2011). Risiken durchschauen: Grafische und analoge Werkzeuge. *Stochastik in der Schule*, *31*(1), 8–16.

Latten, S., Martignon, L., Monti, M., & Multmeier, J. (2011). Die Förderung erster Kompetenzen für den Umgang mit Risiken bereits in der Grundschule. Ein Projekt von RIKO-STAT und dem Harding Center. *Stochastik in der Schule*, *31*(1), 17–25.

Lindmeier, A., & Reiss, L. (2014). Wahrscheinlichkeitsvergleich und inferenzstatistisches Schließen. Fähigkeiten von Kindern des 4. und 6. Schuljahres bei Basisproblemen aus dem Bereich Daten und Zufall. *Mathematica Didactica*, *37*, 30–60.

Macchi, L. (1995). Pragmatic aspects of the base rate fallacy. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *48*(1), 188–207.

Martignon, L., & Krauss, S. (2009). Hands-on activities for fourth graders: a tool box for decision-making and reckoning with risk. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 227–258.

Martignon, L., & Kurz-Milcke, E. (2006b). Educating children in stochastic modeling: games with stochastic urns and colored tinker-cubes. In *Proceedings of the 7th international conference on teaching statistics (ICOTS7)*. Salvador.

Piattelli-Palmarini, M. (1994). *Inevitable illusions: how mistakes of reasons rule our minds*. New York: John Wiley.

Pinker, S. (1997). *How the mind works*. New York: W. W. Norton.

Saldanha, L., & Liu, Y. (2014). Challenges of developing coherent probabilistic reasoning: rethinking randomness and probability from a stochastic perspective. In E. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 367–395). Dordrecht: Springer Science + Business Media.

Samuels, R., Stich, S., & Bishop, M. (2002). Ending the rationality wars: how to make disputes about human reasoning disappear. In R. Elio (Ed.), *Common sense, reasoning and rationality* (pp. 311–321). New York: New York: OUP.

Scholz, R. W., & Waschescio, R. (1986). Kognitive Strategien von Kindern bei Zwei-Scheiben Rouletteaufgaben. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hannover: Franzbecker.

Sedlmeier, P. (2001). Statistik ohne Formeln. In M. Borovcnik, J. Engel, & D. Wickmann (Eds.), *Anregungen zum Stochastikunterricht: die NCTM-Standards 2000; Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich* (pp. 83–95). Berlin: Verlag Franzbecker.

Sedlmeier, P., & Gigerenzer, G. (2001). Teaching bayesian reasoning in less than two hours. *Experimental Psychology General*, *130*(3), 380–400.

Spiegelhalter, D., & Gage, J. (2014). What can education learn from real-world communication of risk and uncertainty. In *Proceedings of the 8th international conference on teaching statistics (ICOTS9)* (pp. 1–7). Flagstaff.

Spiegelhalter, D., Pearson, M., & Short, I. (2011). Visualizing uncertainty about the future. *Science*, *333*, 1393–1400.

Till, C. (2014). Fostering risk literacy in elementary school. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *9*(2), 85–98.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen* (Dissertationsschrift, Hildesheim).

Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve bayesian problems: the role of representation in mental computation. *Cognition*, *98*, 287–308.

6 Diskussion und Fazit

In diesem Kapitel soll es darum gehen, die zentralen Ergebnisse der drei Publikationen zusammenzufassen und kritisch zu reflektieren. Es werden Begründungen für die inhaltlichen Schwerpunkte der drei Artikel gegeben und diese vernetzt. Darauf aufbauend werden mögliche Ansätze zur vertieften Forschung zu Risk Literacy in der Grundschule vorgeschlagen.

Der 1. Artikel versteht sich als Überblicksartikel, in dem die Notwendigkeit für die Förderung von Risk Literacy in der Schule zunächst theoretisch begründet wird. Es werden die Inhalte der Intervention vorgestellt und von der Wirksamkeit dieser berichtet. Die Schülerinnen und Schüler konnten bereits vor der Intervention einen Großteil der Aufgaben korrekt lösen, was auf Vorwissen in Form von stochastischen Intuitionen hindeutet (Fischbein u. a., 1970a). Die Lösungsraten der Schülerinnen und Schüler waren in allen Aufgabenbereichen des Vortests zufriedenstellend, was darauf hindeutet, dass Kinder vorläufiges Begriffswissen zu den verschiedenen in der Intervention behandelten Konzepten besitzen (Proportionen, Erwartungswert, Risikoreduktion, bedingte Wahrscheinlichkeit). Die Intervention führte zu einer Leistungsverbesserung bezüglich der abgefragten Konzepte; die Schülerinnen und Schüler erreichten zum Nachtest- und zum Follow-up Testzeitpunkt eine zum Vortestzeitpunkt signifikant höhere Testleistung. Dabei konnte ein Zuwachs in allen geförderten Bereichen festgestellt werden. In diesem Artikel wurden elementare Kompetenzen zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit anhand des Summenscores eines jeweiligen Probanden operationalisiert. Es sollte nicht darum gehen, die Leistungen der Schülerinnen und Schüler in den verschiedenen Bereichen miteinander zu vergleichen. Risk Literacy wird als mehrdimensionales Konstrukt verstanden; aus diesem Grund wurden lediglich Aussagen und Schlussfolgerungen gezogen, die sich auf die gesamte Testleistung einer Schülerin oder eines Schülers beziehen.

Darüber hinaus besitzen die behandelten Inhalte der Unterrichtseinheit keine hohe Trennschärfe. Das heißt, die Schnittmengen der für die Bereiche erforderlichen Kompetenzen sind sehr groß, oder in verschiedenen Bereichen benötigt man dieselben übergeordneten Kompetenzen zur Lösung der Aufgaben. Die Aufgaben in den Tests sind zwar den verschiedenen Bereichen zugeordnet, einige dieser Aufgaben könnte man jedoch sowohl dem einen oder dem anderen Bereich zuordnen. Die Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit oder der Risikoreduktion erfordern Wissen zum Proportionsbegriff. Bei den Aufgaben zum Erwartungswert und den Wahrscheinlichkeitsvergleichen (Proportionen) spielen wiederum übergeordnete Kompetenzen wie probabilistisches Denken eine Rolle. Beim Vergleich relativer Häufigkeiten (Proportionen) und einigen Items zu bedingten Wahrscheinlichkeiten sind hingegen Kompetenzen im Bereich Statistik erforderlich (Verhältnisse erweitern, Wissen über Merkmale, Kategorisierungen). Es würde daher wenig Sinn machen, die erzielten Leistungen in den verschiedenen Bereichen miteinander zu vergleichen.

Ein weiterer Grund, warum dieser Vergleich nicht angestellt wird, ist die Tatsache, dass die Inhalte der Intervention unterschiedlich gewichtet sind und dies auch in der Verteilung der Aufgaben im Testinstrument berücksichtigt ist. Die Aufgaben zum Proportionsbegriff nehmen den größten Raum ein, da proportionales Denken Kernkompetenz für Risk Literacy ist und somit für alle anderen Bereiche von Bedeutung ist. Mehr als ein Drittel (10 Punkte) der Punkte im Test wird durch Aufgaben zum proportionalen Denken abgedeckt. Es folgen die Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit (6 Punkte), zum Erwartungswert (3 Punkte) und zur Risikoreduktion (2 Punkte). Zudem enthält der Test weitere Aufgaben (8 Punkte), die keinem dieser Bereiche zugeordnet werden können. In diesen Aufgaben sind verschiedene Kompetenzen zur Vorhersage der Ergebnisse bei Zufallsexperimenten erforderlich.

Für den 2. und 3. Artikel wurde jeweils ein spezifischer Bereich der Intervention beleuchtet. Für den 2. Artikel wurde der Proportionsbegriff in den Fokus genommen, im 3. Artikel stand die bedingte Wahrscheinlichkeit und das bayesianische Schließen im Vordergrund. Diese Schwerpunktsetzung leitet sich aus der zentralen Bedeutung dieser Bereiche für Risk Literacy ab. Das proportionale Denken ist Kernkompetenz für den adäquaten Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und somit für Risiko und findet sich in allen anderen Bereichen (Erwartungswert, Risikoreduktion, bedingte Wahrscheinlichkeit) wieder. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und bayesiansches Schließen haben einen hohen Anwendung- und Realitätsbezug. Außerdem haben Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten, diese Konzepte zu verstehen, wenn sie kalkülhaft und formal im Unterricht gelehrt werden (Wassner, 2004). Es war mir an dieser Stelle wichtig, aufzuzeigen, dass elementare Kompetenzen zu diesen Konzepten bereits in der Grundschule nachhaltig gefördert werden können und dass die Verständnisschwierigkeiten zum größten Teil auf das Darstellungsformat zurückgeführt werden können.

Nachdem im 1. Artikel ein Überblick über alle geförderten Bereiche erfolgte, sollten dann im 2. Artikel explizit Verständnisprobleme zum Verhältnisdenken sowie Förderansätze zum proportionalen Denken vorgestellt werden. Ähnlich wie im 1. Artikel wurde die enorme Bedeutung proportionalen Denkens für den Wahrscheinlichkeitsbegriff theoretisch herausgearbeitet. Es wurden beim Verhältnisvergleich häufig auftretende Fehlkonzepte vorgestellt und aufgezeigt, wie gute Repräsentationen helfen können, das intuitive Vorwissen zum Proportionsbegriff zu schärfen.

Die Schülerinnen und Schüler konnten zum Vortestzeitpunkt bereits die Hälfte der Aufgaben zum Proportionsbegriff lösen; ihre Testleistung steigerte sich durch die Intervention signifikant. Trotz der zufriedenstellenden Leistung der Schülerinnen und Schüler kann nicht von einem ausgereiften Wissen zum Proportionsbegriff nach der Intervention gesprochen werden. In der Tat sind zielführende Strategien beim Erweitern und Vergleichen von Verhältnissen feststellbar; nach der Intervention griffen mehr Schülerinnen und Schüler auf proportionale statt auf additive Strategien zurück als zum Vortestzeitpunkt. Gleichzeitig zeigten einige Schülerinnen und Schüler zu allen Testzeitpunkten typische Fehlkonzepte, wie das *additive Fehlkonzept* oder das *Ausblenden von Größen* beim Verhältnisvergleich. Dies zeigen die Lösungsraten einer Aufgabe, in der die angewendeten Strategien der Schülerinnen und Schüler sichtbar werden. Die Analyse dieser Aufgabe zeigt zwar einen Konzeptwechsel weg von fehlerhaften additiven hin zu korrekten multiplikativen Strategien, jedoch greift die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler drei Monate nach der Intervention immer noch auf additive Strategien zurück. Dies ist keineswegs als Misserfolg zu deuten. Es ist lediglich ein Hinweis, dass ein Konzeptwechsel durch eine kurze Intervention zwar angeregt werden kann; proportionales Denken ist jedoch das Ergebnis eines langen Lernprozesses. Dieser Lernprozess wird anhand geeigneter Darstellungsformate unterstützt und vermutlich auch verkürzt. Somit entwickeln sich aus Primär- Sekundärintuitionen (Fischbein u. a., 1970a), die schließlich zu einem ausgereiften und tragfähigen Begriffswissen ausgebaut werden sollten. Die Förderung proportionalen Denkens wirkt sich nicht nur positiv auf den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten aus. Auch Prozent- und Bruchzahlbegriff können durch einen früher ausgereiften Proportionsbegriff womöglich tiefer durchdrungen und miteinander vernetzt werden (Barzel & Kleine, 2013).

Sowohl beim 1. als auch beim 2. Artikel wurde von Vorwissen berichtet, welches durch die Intervention (nachhaltig) gefördert werden konnte. Für den 3. Artikel wurden die Förderansätze zu bedingten Wahrscheinlichkeiten und bayesianischem Schließen vorgestellt. Auch hier konnten Schülerinnen und Schüler bereits vor der Intervention die Hälfte der Aufgaben korrekt lösen und ihre Leistung durch eine kurze Intervention signifikant verbessern. Aus bisherigen Studien zu bedingten Wahrscheinlichkeiten leitet sich ab, dass viele Verständnisschwierigkeiten auf das Darstellungsformat zurückzuführen sind und bestimmte Repräsentationen eine vereinfachte Sicht auf die Sachsituation erlauben. Ich gehe davon aus, dass einige der Schülerinnen und Schüler bereits vor der Intervention typische und oftmals als schwer eingeschätzte bayesianische Aufgaben lösen konnten, da sie in Form von Häufigkeitsformaten in den Testaufgaben dargestellt wurden („*6 von 10* sind Zauberer und *5 von diesen 6* Zauberern tragen einen Hut (...)“). Dies erleichterte den Kindern vermutlich, die Merkmalsverteilung intuitiv zu erfassen. Dadurch, dass für diese Art von Aufgaben auch Kompetenzen zum Proportionsbegriff erforderlich sind, kann man davon ausgehen, dass sich auch die Auseinandersetzung mit den anderen Bereichen der Intervention positiv auf die Nachtest- und Follow-up Testergebnisse auswirkt.

Im 3. Artikel wurde auch über die positive Einstellung der befragten zukünftigen Lehrkräfte berichtet. Ideen zur Verbesserung oder Erweiterung des Stochastikunterrichts in der Grundschule müssen gehört, akzeptiert und in die Unterrichtspraxis implementiert werden. Die Befragung der Lehramtsstudierenden sollte eine Diskussion über Risk Literacy in der Grundschule anhand geeigneter Repräsentationen anregen.

Ausarbeitungen in Form von Artikeln zum Erwartungswert und zur Risikoreduktion existieren nicht. Beide Bereiche wurden als Teil der Intervention im 1. Artikel betrachtet. Auf eine explizite Analyse wurde jedoch verzichtet, da für die vorliegende Arbeit nur insgesamt drei Artikel vorgesehen waren. Eine vertiefte Analyse der Unterrichtsinhalte und Testaufgaben zum Erwartungswert steht noch aus. Ein genauer Blick in die Fähigkeiten von Schülerinnen und Schüler zum Erwartungswert erfordert die Entwicklung weiterer Testaufgaben. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die Risikoreduktion. Üblicherweise ist

Tabelle 6.1: Übersicht zu den Inhalten und Ergebnissen der Artikel

Artikel	Inhalte	Ergebnisse
Nr. 1	**Risk Literacy in der Grundschule: Vorstellung der Studie**	
	- Proportionsbegriff - Erwartungswert (trade-offs) - Risikoreduktion - Bedingte Wahrscheinlichkeit	- Vorwissen in Form stochastischer Intuitionen - Kurzzeit- und Langzeiteffekte der Intervention - Testleistungen abhängig von Mathematiknote - Testleistungen nicht geschlechts- und altersabhängig
Erfolgreiche Förderung stochastischer Intuitionen anhand geeigneter Repräsentationsformate		
Nr. 2	**Förderung proportionalen Denkens anhand geeigneter Repräsentationen**	
	- Verhältnisvergleich - Verhältnisse erweitern	- Vorwissen in Form stochastischer Intuitionen - robuste Fehlkonzepte beim Verhältnisdenken - Strategiewahl (additiv-multiplikativ) beim Verhältnisvergleich abhängig von der Aufgabe - Anregung zum Konzeptwechsel durch die Intervention (additiv→multiplikativ)
Ansatz über Steckwürfel und natürliche Häufigkeiten gut geeignet, proportionales Denken zu fördern		
Nr. 3	**Förderansätze zur bedingten Wahrscheinlichkeit und bayesianischem Schließen**	
	- Kategorisierung und Kodierung von Merkmalen	- Vorwissen in Form stochastischer Intuitionen
	- Modellierung einer bayesianischen Aufgabe	- signifikante Verbesserung der Testleistung ($p < .01$) (Vortest - Nachtest) - marginal signifikante Verbesserung der Testleistung ($p < .1$) (Vortest - Follow-up Test)
	- Befragung zukünftiger Mathematiklehrkräfte	- große Bereitschaft, den vorgestellten Ansatz zur Vermittlung stochastischer Inhalte über natürliche Darstellungsformate in die eigene Unterrichtspraxis zu implementieren
Natürliche Häufigkeitsformate in Kombination mit ikonischen Darstellungen gut geeignet für die frühe Förderung bedingter Wahrscheinlichkeiten und bayesianischem Schließen		

diese geknüpft an Prozentangaben („Reduktion um 20 %"). Für die vorliegende Studie wurde lediglich die Reduktion um 50 % behandelt, indem diese in eine vereinfachte Form übersetzt wurde: „Reduktion *um die Hälfte*". Es stellt sich die Frage, ob und wie man Risikoreduktionen im Stochastikunterricht der Grundschule ausbauen sollte. Eine Verknüpfung von Inhalten für die Grundschule („*4 von 10* Fußbällen gehen kaputt → *2 von 10* Fußbällen gehen kaputt") mit möglichen Inhalten für die Sekundarstufe wäre sicher sinnvoll („*4 von 10* Menschen erkranken ohne Medikament → *2 von 10* Menschen erkranken mit Medikament"). Ich erachte es durchaus als sinnvoll, Risikoreduktionen im Stochastikunterricht der Grundschule zu thematisieren und diese dem Erweitern und Kürzen von Verhältnissen gegenüberzustellen (Reduktion: „Etwas verändert sich *4 von 10* → *2 von 10*"; Erweitern/Kürzen von Verhältnissen: „Etwas bleibt ‚gleich' *4 von 10* → *2 von 5*"). Die kritische Auseinandersetzung mit absoluten und relativen Risiken im Stochastikunterricht der Sekundarstufe ergänzt diesen spielerischen Umgang mit sich veränderten Verhältnissen. Im Sinne eines fachübergreifenden Unterrichts können dann auch folgenden Fragen aufgeworfen und diskutiert werden: „Warum werden manchmal absolute und manchmal relative Risiken kommuniziert?"
(Stichwort: mismatched framing (Wegwarth & Gigerenzer, 2011)).

Gemeinsam ist allen Artikeln, dass von Vorwissen und von einer Leistungssteigerung berichtet wurde. Es ist davon auszugehen, dass dies auf den Ansatz über *gute Repräsentationen* in Form von Steckwürfeln, ikonischen Darstellungen und natürlichen Häufigkeiten zurückzuführen ist. Ob es um den Vergleich zweier Verhältnisse oder um richtige Schlussfolgerungen bei bayesianischen Aufgaben geht, aufgrund analoger Repräsentationen kann intuitives Wissen abgerufen und der Aufbau von Primär- zu Sekundärintuitionen eingeleitet werden.

In den Artikeln wurde der Schwerpunkt auf die quantitative Analyse der erzielten Testleistungen der Schülerinnen und Schüler gelegt. Im Sinne einer Machbarkeitsstudie sollten Belege für die Sinnhaftigkeit der frühen Förderung verschiedener Konzepte zu Risk Literacy gesammelt werden. Risk Literacy wurde als die erzielte Testleistung operationalisiert. Eine Steigerung dieser Leistung sollte dann als Hinweis auf den Erfolg des Förderansatzes gedeutet werden. Lernen kann durch ein Instrument in Form eines Wissenstests nie in seinem Facettenreichtum erfasst werden. Aus diesem Grund spreche ich zwar von Lernerfolg durch die Intervention, jedoch ist mir die Beschränkung bewusst. Qualitative Studien zum Thema könnten die vorliegende quantitative Studie ergänzen. Zum Beispiel könnten Interviews mit den Schülerinnen und Schülern oder Beobachtungen im Klassenzimmer spezifischere Aussagen zum Lehren und Lernen elementarer Kompetenzen und Konzepte zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit erlauben. An dieser Stelle könnten zusätzliche Kovariaten wie Motivation, Interesse und Spaß an den Inhalten der Unterrichtseinheit empirisch erfasst werden.

In der vorliegenden Dissertation wurde aufgezeigt, dass die Förderung elementarer Kompetenzen und Konzepte zur mathematischen Modellierung von Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit bereits in der Primarstufe erfolgreich und nachhaltig ist. Der Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff über Häufigkeitsformate erlaubt es den Schülerinnen und Schülern, vorherrschende Primärintuitionen zu schärfen und den Aufbau tragfähiger Sekundärintuitionen einzuleiten. Durch systematische Instruktion und eine tiefgehende Auseinandersetzung entwickelt sich schließlich formales Begriffswissen. Dies ist ein dynamischer Prozess, in welchem heuristische Modelle nach und nach modifiziert und zu formalen Konzepten ergänzt werden. Die frühe phänomenologische Begegnung mit elementaren Konzepten aus der Statistik und der Wahrscheinlichkeit beugt dabei Fehlvorstellungen und Fehlkonzepten vor. Unerwartete Ereignisse bei Zufallsprozessen lösen kognitive Konflikte aus und Schülerinnen und Schüler werden angeregt, vertraute Vorstellungen zu überdenken. Heuristiken, die bei bestimmten stochastischen Problemen zielführend waren, erweisen sich bei anderen Problemen plötzlich als weniger geeignet. Umgekehrt werden korrekte Primärintuitionen durch bestimmte Ereignisse verstärkt und dabei modifiziert.

Wichtige Voraussetzung für den erfolgreichen Aufbau elementarer mathematischer und stochastischer Konzepte ist der einfache, flexible und zugängliche Charakter der eingesetzten Materialien. Der Einsatz bunter Steckwürfel in Kombination mit ikonischen Darstellungen erlaubte es, den Schülerinnen und Schülern Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Verhältnisse auf natürliche und analoge Art zu erfassen. Quantifizierungen von Wahrscheinlichkeiten, die typischerweise erst in der Sekundarstufe mit der Einführung von Brüchen und Prozenten behandelt werden, erfolgten über *natürliche Häufigkeiten*. Der häufigkeitsbasierte Zugang zum Proportionsbegriff, zum Erwartungswert, zur Risikoreduktion und zu bedingten Wahrscheinlichkeiten hat nicht nur zur Konsequenz, dass diese Konzepte in der Sekundarstufe besser durchdrungen werden; der häufigkeitsbasierte Zugang eröffnet spannende Themenfelder für den Stochastikunterricht, die über einfache Experimente mit Glücksrädern und qualitative Wahrscheinlichkeitsvergleiche (unmöglich, wahrscheinlich, sicher) hinausgehen.

Zufällige Ereignisse, die an Gewinne oder Verluste geknüpft sind, gepaart mit der Möglichkeit, sich für eine bestimmte unter mehreren Optionen zu entscheiden, bieten Raum im Klassenverband, über Dispositionen wie Risikobereitschaft oder Risikoscheue zu diskutieren. Darüber hinaus geht die Auseinandersetzung mit zufälligen Phänomenen mit der wachsenden Erkenntnis bei Kindern einher, dass Vorgänge und Prozesse in unserer Umwelt meist nicht nach deterministischen Prinzipien funktionieren. Mit Risiken umzugehen, heißt immer auch, sich mit Situationen auseinanderzusetzen, in denen der Ausgang ungewiss und das Ausmaß des Ausgangs schwierig abzusehen ist. Ein Ereignis kann, muss aber nicht eintreten.

Die Motivation der vorliegenden Studie leitete sich aus kognitionspsychologischen Ergebnissen zur menschlichen Informationsverarbeitung ab. Schwierigkeiten im Umgang mit Risiko und damit verbundenen Entscheidungen unter Unsicherheit können auf Repräsentationen zurückgeführt werden, die sich für die menschliche Informationsverarbeitung als ungeeignet erweisen. Häufigkeitsformate sind hingegen verständnisfördernd und helfen nicht nur Erwachsenen, sondern auch Kindern am Ende der Grundschulzeit, Wahrscheinlichkeiten zu erfassen und somit Risikosituationen spielerisch zu modellieren.

Die Sinnhaftigkeit einer Förderung von Risk Literacy im Primarbereich konnte empirisch bestätigt werden. Neben festgestellten kurzzeitigen und nachhaltigen Lernzuwächsen wurde deutlich, dass Risiko als ein sehr spannendes Thema erlebt wird. Darauf deuten

Aussagen der Schülerinnen und Schüler hin. Der handlungsorientierte Zugang zur Stochastik bietet viele Möglichkeiten, für die Kinder selbst aktiv zu werden. Dies erlaubt neben der Stärkung inhaltsbezogener auch die Förderung prozessbezogener Kompetenzen wie Argumentations- und Kommunikationsfähigkeit oder Fertigkeiten wie das Durchführen von Zufallsexperimenten sowie das Darstellen und Dokumentieren deren Ergebnisse. Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit als Themenfeld mit hohem Anwendungsbezug und praktischer Relevanz ist sehr gut dafür geeignet, stochastisches Denken zu fördern und einen ersten Beitrag zu „Risk Literacy" zu leisten.

7 Anhang

7.1 Darlegung des eigenen Anteils

Die Dissertation gliedert sich in einen Rahmen und einen Publikationsteil. Der Rahmen, bestehend aus theoretischem Hintergrund, Vorstellung der Studie, Beschreibung und Diskussion der drei Artikel sowie Fazit und Anhang, wurde von Christoph Till erstellt. Der Publikationsteil, bestehend aus drei Artikeln, wurde – unter Berücksichtigung wertvoller Anregungen und Formulierungsvorschlägen durch Prof. Dr. Laura Martignon – von Christoph Till erstellt.

Für die Rekrutierung der Lehrpersonen und Klassen sowie für Organisation und Durchführung der Studie war Christoph Till zuständig. Die Ideen zur Gestaltung der vierstündigen Unterrichtseinheit entspringen seinen Gedanken. Unterstützend standen für die Gestaltung der Unterrichtseinheit und der Testinstrumente Laura Martignon, Joachim Engel, Wolfgang Gaissmaier, Sebastian Kuntze und Christoph Nürk zur Seite. Das Testinstrument wurde von Christoph Till selbst erstellt und die erhobenen Daten eigenständig ausgewertet. Barbara Flunger (Universität Tübingen) wirkte unterstützend mit.

7.2 Überblick über Artikel und Konferenzbeiträge

- Dreher, A., Käfer, O., Schmeisser, S., Till, C., & Kuntze, S. (2012). Viele Themen - eine Idee. Multi-Pack - Lernumgebungen. *Mathematik lehren, 173,* 9-15.
- Till, C. (2012). Das Gummibärenkartell - Vorstellung einer Statistiksoftware für Primar- und Sekundarstufe. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012,* 881-884.
- Till, C. (2013). Vorstellungen von Grundschulkindern zu Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013,* 1010-1013.
- Till, C., & Sproesser, U. (2013). Eine Grafik sagt mehr als tausend Worte?! Über den Einsatz von Repräsentationen in der Stochastik. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (S. 205-213). Wiesbaden: Springer.
- Martignon, L., & Till, C. (2013). Verhältnisse, Brüche und Wahrscheinlichkeiten. *Mathematik lehren, 179,* 12-13.
- Till, C. (2013). Fostering probabilistic intuitions of risk and decision making under uncertainty. *Paper presented at the PME - 37 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Kiel.
- Till, C. (2014). Unstatistiken: Statistische Fehlschlüsse in den Medien. In U. Sproesser, S. Wessolowski & C. Wörn (Hrsg.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt* (S. 59 – 66). Wiesbaden: Springer.
- Till, C. (2014). Risk Literacy in der Grundschule - Ergebnisse einer Interventionsstudie. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014,* 1223-1226.
- Till, C. (2014). Risk Literacy: first steps in primary school. *Paper presented at the ICOTS 9 International Conference of Teaching Statistics,* Flagstaff.
- Till, C. (2014). Fostering Risk Literacy in elementary school. *Mathematics Education, 9*(2), 85-98.
- Till, C. (2015). Warum ist 1 von 2 wahrscheinlicher als 2 von 9? Denken in Verhältnissen als Basiskompetenz für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Lernen und Lernstörungen, 4*(2), 99-114.

Literaturverzeichnis

Aizikovitsh-Udi, E., & Kuntze, S. (2014). Critical thinking as an impact factor on statistical literacy – theoretical frameworks and results from an intervention study. (pp. 1–6). Flagstaff.

Barzel, B., & Kleine, M. (2013). Verhältnisse. Ein Thema quer durch die Schulmathematik. *Mathematiklehren*, *179*, 2–8.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(4), 527–547.

Bazerman, M., & Neale, M. (1986). Heuristics and negotiation. In H. Arkes, & K. Hammond (Eds.), *Judgment and decision making: an interdisciplinary reader* (pp. 311–321). Cambrdige: Cambridge University Press.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (2008). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi, & J. B. Garfield (Eds.), *Developing students' statistical reasoning* (pp. 3–15). Dordrecht: Springer Netherlands.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2009). Research and developments in probabilistic education. *International Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 111–130.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: where children go wrong. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1478–1490.

Brase, G. L. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. Retrieved from http://www.k-state.edu/psych/research/documents/2009ACP.pdf

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge: Belkapp Press.

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozess der Erziehung.* Berlin: Berlin-Verlag.

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). Children's understanding of probability. a literature review (full report). Retrieved from http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? Stochastische Vorstellungen entwickeln. *PM – Praxis der Mathematik*, *47*(4), 1–7.

Cadez, T. H., & Skrbec, M. (2011). Understanding the concepts in probability of pre-school and early school children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *7*(4), 263–279.

Campbell, S. (2005). Determining overall risk. *Journal of Risk Research*, *8*, 569–581.

Cokely, E. T., Galesic, M., Schulz, E., Ghazal, S., & Garcia-Retamero, R. (2012). Measuring risk literacy: the berlin numeracy test. *Judgment and Decision Making*, *7*(1), 25–47.

Corter, J. E., & Zahner, D. C. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal*, *6*(1), 22–50.

Cosmides, L., & Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, *58*, 1–73.

Dehmer, D., & Möllhoff, C. (2014). Wie die Welt auf Ebola vorbereitet ist. Zugriff unter http://www.tagesspiegel.de/weltspiegel/ebola-krise-in-westafrika-wie-die-welt-auf-ebola-vorbereitet-ist/10795764.html

delMas, R. C. (2002). Statistical literacy, reasoning, and learning: a commentary. *Journal of Statistics Education*, *10*(3). Retrieved from http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/delmas_discussion.html

Denes-Raj, V., & Epstein, S. (1994). Conflict between intuitive and rational processing. when people behave against their better judgment. *Journal of Personality and Social Psychology*, *66*(5), 819–829.

Denison, S., & Xu, F. (2013). The origins of probabilistic inference in human infants. *Cognition*, *130*(3), 335–347.

Diaz, C., & Fuente, D. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 128–148.

Diepgen, R., Kuypers, W., & Karlheinz, R. (1993). *Mathematik Gymnasiale Oberstufe. Allgemeine Ausgabe / Stochastik: Grund- und Leistungskurs*. Berlin: Cornelsen Verlag.

Doucleff, M. (2014). What's my risk of catching ebola? Retrieved from http://www.npr.org/blogs/goatsandsoda/2014/10/23/358349882/an-answer-for-americans-who-ask-whats-my-risk-of-catching-ebola?utm_source=npr_email_a_friend&utm_medium=email&utm_content=20141024&utm_campaign=storyshare&utm_term=

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 335–347). Cambridge: Cambridge University Press.

Engel, J. (2007). Daten im Mathematikunterricht: Wozu? Welche? Woher? *Der Mathematikunterricht*, *3*, 12–22.

Falk, R., & Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: adjusting probabilities. *Developmental Psychology*, *34*(6), 1340–1357.

Falk, R., Yudilevich-Assouline, P., & Elstein, A. (2012). Children's concept of probability as inferred from their binary choices – revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(2), 207–233.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory research. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1–24.

Fischbein, E., Pampu, I., & Minzat, I. (1970a). Comparison of ratios and the chance concept in children. *Child Developement*, *41*, 377–389.

Fischbein, E., Pampu, I., & Minzat, I. (1970b). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *British Journal of Educational Psychology*, *40*, 261–270.

Gaissmaier, W., & Gigerenzer, G. (2008). Statistical illiteracy undermines informed shared decision making. *Zeitschrift für Evidenz, Fortbildung und Qualität im Gesundheitswesen*, *102*, 411–413.

Gaissmaier, W., Wegwarth, O., Skopec, D., Müller, A.-S., Broschinski, S., & Politi, M. C. (2012). Numbers can be worth a thousand pictures: individual differences in understanding graphical and numerical representations of health-related information. *Health Psychology*, *31*(3), 286–296.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). Wiesbaden: Springer.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy. Needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. (pp. 1–7). Seoul, Korea.

Gal, I., & Garfield, J. B. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal, & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1–13). Amsterdam: IOS Press.

Galesic, M., & Garcia-Retamero, R. (2010). Statistical numeracy for health. A cross-cultural comparison with probabilistic national samples. *Archives of Internal Medicine*, *170*(5), 462–465.

Garcia-Retamero, R., Galesic, M., & Gigerenzer, G. (2010). Do icon arrays help reduce denominator neglect? *Medical Decision Making*, *30*(6), 672–684.

Garfield, J. B., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics. Implications for research. *Journal for Research in Mathematical Education*, *19*(1), 44–63.

Gigerenzer, G. (1991). How to make cognitive illusions disappear. beyond "heuristics and biases". *European Review of Social Psychology*, *2*, 83–115.

Gigerenzer, G. (2013). *Risiko. Wie man die richtigen Entscheidungen trifft*. München: Bertelsmann Verlag.

Gigerenzer, G., & Gaissmaier, W. (2011). Heuristic decision making. *Annual Review of Psychology*, *62*, 451–482.

Gigerenzer, G., Gaissmaier, W., Kurz-Milcke, E., Schwartz, L. M., & Woloshin, S. (2008). Helping doctors and patients make sense of health statistics. *Association for Psychlogical Science*, *8*(2), 53–96.

Gigerenzer, G., & Gray, M. (2011). *Better patients, better doctors, better decisions: envisioning health care 2020*. Cambridge: MIT Press.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychologycal Review*, *102*(4), 684–704.

Gigerenzer, G., & Krämer, W. (2014). Gen-Mais tötet. Zugriff unter http://www.unstatistik.de

Gigerenzer, G., & Selten, R. (2001). *Bounded rationality: the adaptive toolbox*. Cambridge: MIT Press.

Girotto, V., & Gonzalez, M. (2001). Solving probabilistic and statistical problems: a matter of information structure and question form. *Cognition*, *78*, 247–276.

Gould, S. (1992). *Bully for brontosaurus. Further reflections in natural history.* London: Penguin Books.

Gresh, D., Deleris, L. A., & Gasparini, L. (2008). Visualizing risk. *IBM research report.*

Haan, G. D., Kamp, G., Lerch, A., Martignon, L., Müller-Christ, G., & Nutzinger, H. (2008). *Nachhaltigkeit und Gerechtigkeit.* New York: Springer Verlag.

Harding Center for Risk Literacy. (2014). Nutzen und Risiken der Prostatakrebs-Früherkennung. Zugriff unter http://wp1146788.server-he.de/index.php/de/was-sie-wissen-sollten/facts-boxes/psa

Hauer-Typpelt, P. (2007). Unbedingt Bedingte Wahrscheinlichkeit? Der Satz von Bayes im Schulunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, *39*, 54–65.

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S., & Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not. *Cognition*, *84*, 343–352.

Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research. Structures and contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 163–194.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow.* New York: Farrar, Straus and Giroux.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica*, *47*, 263–291.

Kapadia, R. (2009). Chance encounters – 20 years later. Fundamental ideas in teaching probability at school level. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 371–386.

KMK. (2003). *Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.* Luchterhand. München.

KMK. (2004). *Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.* Luchterhand. München.

KMK. (2012). *Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.12.2012.* Luchterhand. München.

Koch, K. (2005). Klinische Studien: Wie „korrekte“ Statistiken täuschen können. Zugriff unter http://www.aerzteblatt.de/archiv/46111

Koerber, S. (2003). *Visualisierung als Werkzeug im Mathematik-Unterricht. Der Einfluss externer Repräsentationsformen auf proportionales Denken im Grundschulalter* (Dissertationsschrift, Hamburg).

Krauss, S., & Hertwig, R. (2000). Muss DNA-Evidenz schwer verständlich sein? Der Weg aus einem Kommunikationsproblem. Zugriff unter http://library.mpib-berlin.mpg.de/ft/skr/SKR_Muss_2000.pdf

Kuntze, S., Gundlach, M., Engel, J., & Martignon, L. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – empirical research in the project 'RIKO-STAT'. In *Proceedings of the 8th international conference on teaching statistics (ICOTS8).* Ljubljana.

Kurtzmann, G., & Sill, H.-D. (2012). AK Stochastik: Vorschläge zu Zielen und Inhalten stochastischer Bildung in der Primarstufe sowie in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften. Zugriff unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0065_Sill.pdf

Kurz-Milcke, E., Gigerenzer, G., & Martignon, L. (2008). Transparency in risk communication. *Annals of the New York Academy of Sciences*, *1128*, 18–28.

Kurz-Milcke, E., Gigerenzer, G., & Martignon, L. (2011). Risiken durchschauen: Grafische und analoge Werkzeuge. *Stochastik in der Schule*, *31*(1), 8–16.

Kurz-Milcke, E., & Martignon, L. (2007). Stochastische Urnen und Modelle in der Grundschule. In *Tagungsband der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 181–203). Berlin.

Latten, S., Martignon, L., Monti, M., & Multmeier, J. (2011). Die Förderung erster Kompetenzen für den Umgang mit Risiken bereits in der Grundschule. Ein Projekt von RIKO-STAT und dem Harding Center. *Stochastik in der Schule*, *31*(1), 17–25.

Lindmeier, A., & Reiss, L. (2014). Wahrscheinlichkeitsvergleich und inferenzstatistisches Schließen. Fähigkeiten von Kindern des 4. und 6. Schuljahres bei Basisproblemen aus dem Bereich Daten und Zufall. *Mathematica Didactica*, *37*, 30–60.

Lorenz, J. H. (2014). Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der kindlichen Entwicklung. In U. Sproesser, S. Wessolowski, & C. Wörn (Hrsg.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt* (S. 159–167). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Macchi, L. (1995). Pragmatic aspects of the base rate fallacy. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *48*(1), 188–207.

Martignon, L., & Krauss, S. (2007). Gezinkte und ungezinkte Würfel, Magnetplättchen und Tinkercubes: Materialien für eine Grundschulstochastik zum Anfassen. *Stochastik in der Schule*, *27*(3), 16–28.

Martignon, L., & Krauss, S. (2009). Hands-on activities for fourth graders: a tool box for decision-making and reckoning with risk. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 227–258.

Martignon, L., & Kurz-Milcke, E. (2006a). Bunte Steckwürfel und Kärtchen: Wege zu einer natürlichen, geschlechtersensitiven Stochastik in der Grundschule. In J. Meyer (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht* (S. 203–223). Hildesheim: Franzbecker.

Martignon, L., & Kurz-Milcke, E. (2006b). Educating children in stochastic modeling: games with stochastic urns and colored tinker-cubes. In *Proceedings of the 7th international conference on teaching statistics (ICOTS7)*. Salvador.

Martignon, L., & Wassner, C. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *8*(2), 202–222.

Micallef, L., Dragicevic, P., & Fekete, J.-D. (2012). Assessing the effect of visualizations on bayesian reasoning through crowdsourcing. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, *18*(12), 2536–2545.

Moore, C. F., Dixon, J. A., & Haines, B. A. (1991). Components of understanding in proportional reasoning: a fuzzy set representation of developmental progressions. *Child Development*, *62*, 441–459.

Neubert, B. (2012). *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit: Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton.

Piattelli-Palmarini, M. (1994). *Inevitable illusions: how mistakes of reasons rule our minds*. New York: John Wiley.

Pinker, S. (1997). *How the mind works*. New York: W. W. Norton.

Pisa Konsortium. (2004). *Pisa 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland. Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Waxmann. Münster.

Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University Press.

Pratt, D., Ainley, J., Kent, P., Levinson, R., Yogui, C., & Kapadia, R. (2011). Role of context in risk-based reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 322–345.

Reyna, V. F., & Brainerd, C. J. (2008). Numeracy, ratio bias, and denominator neglect in judgments of risk and probability. *Learning and Individual Differences*, *18*(1), 89–107.

Saldanha, L., & Liu, Y. (2014). Challenges of developing coherent probabilistic reasoning: rethinking randomness and probability from a stochastic perspective. In E. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 367–395). Dordrecht: Springer Science + Business Media.

Samuels, R., Stich, S., & Bishop, M. (2002). Ending the rationality wars: how to make disputes about human reasoning disappear. In R. Elio (Ed.), *Common sense, reasoning and rationality* (pp. 311–321). New York: New York: OUP.

Schapira, M. M., Nattinger, A. B., & McHorney, C. A. (2001). Frequency or probability? A qualitative study of risk communication formats used in health care. *Medical Decision Making*, *21*, 459–467.

Schiller, A., & Kuntze, S. (2012). Auf der Suche nach den bissigen Hunden – Die Idee des Einschätzens von Risiken mit mathematischen und statistischen Grundkompetenzen verknüpfen. *Stochastik in der Schule*, *32*(1), 20–28.

Scholz, R. W., & Waschescio, R. (1986). Kognitive Strategien von Kindern bei Zwei-Scheiben Rouletteaufgaben. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hannover: Franzbecker.

Sedlmeier, P. (2001). Statistik ohne Formeln. In M. Borovcnik, J. Engel, & D. Wickmann (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht: die NCTM-Standards 2000; Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich* (S. 83–95). Berlin: Verlag Franzbecker.

Sedlmeier, P., & Gigerenzer, G. (2001). Teaching bayesian reasoning in less than two hours. *Experimental Psychology General*, *130*(3), 380–400.

Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M., & Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. In *Proceedings of the 28th international conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 177–184). Bergen.

Spiegelhalter, D., & Gage, J. (2014). What can education learn from real-world communication of risk and uncertainty. In *Proceedings of the 8th international conference on teaching statistics (ICOTS9)* (pp. 1–7). Flagstaff.

Spiegelhalter, D., Pearson, M., & Short, I. (2011). Visualizing uncertainty about the future. *Science*, *333*, 1393–1400.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. In *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 169–176). Prague.

Strunz, U. (2012). *Das neue Anti-Krebs-Programm: Dem Krebs keine Chance geben: So schalten Sie die Tumor-Gene ab*. München: Heyne Verlag.

Taleb, N. (2010). *Der Schwarze Schwan: Die Macht höchst unwahrscheinlicher Ereignisse*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (2002). *Didaktik der Stochastik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.

Till, C. (2014). Fostering risk literacy in elementary school. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *9*(2), 85–98.

Wagner, M. (2014). "A plague like no other": americans panic over first U.S. – diagnosed ebola patient. Retrieved from http://www.nydailynews.com/life-style/health/americans-panic-u-s-diagnosed-ebola-patient-article-1.1959147

Wallman, K. (1993). Enhancing statistical literacy: enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), 1–8.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen* (Dissertationsschrift, Hildesheim).

Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: a complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, *2*(2), 3–46.

Wegwarth, O., & Gigerenzer, G. (2011). Risikokommunikation: Nutzen und Risiken richtig verstehen. *Deutsches Ärzteblatt*, *108*(11), 568–569.

Wikipedia-Autoren. (2014a). Erwartungswert. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Erwartungswert&oldid=135505407

Wikipedia-Autoren. (2014b). Risiko. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Risiko&oldid=135541620

Wikipedia-Autoren. (2014c). Stochastik. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/wiki/Stochastik

Wollring, B. (1995). *Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern* (Habilitationsschrift, Westfälische Wilhelms-Universität Münster).

Yost, P., Siegal, A., & Andrews, J. M. (1962). Nonverbal probability judgements by young children. *Child Development*, *33*(4), 769–780.

Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve bayesian problems: the role of representation in mental computation. *Cognition*, *98*, 287–308.